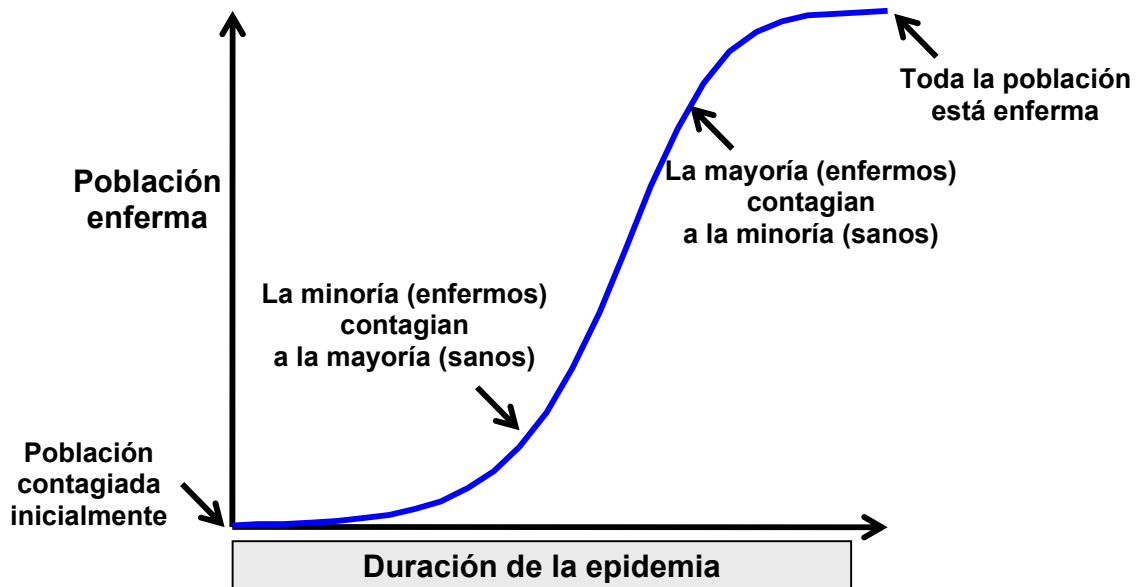


Fundamentos de la dinámica de sistemas

y

Modelos de dinámica de sistemas en epidemiología



Autores:

Juan de Mata Donado Campos

Sebastián Dormido Canto

Fernando Morilla García

Madrid, mayo de 2005

ÍNDICE

- 1. Introducción a la Dinámica de Sistemas**
 - 1.1. Generalidades y Definiciones**
 - 1.2. Metodología Sistémica**
 - 1.3. Aplicaciones de la Dinámica de Sistemas**

- 2. Estructuras y Comportamientos elementales en Dinámica de Sistemas**
 - 2.1. Un Lenguaje Elemental para la Descripción de Sistemas: Diagramas de Influencias**
 - 2.2. Diagramas de Forrester**
 - 2.3. Modelo Matemático**
 - 2.4. Bucle de Realimentación Negativa**
 - 2.5. Bucle de Realimentación Positiva**
 - 2.6. Sistemas Complejos y Estructuras Genéricas**

- 3. Visión Sistémica de la Incidencia y de la Prevalencia**
 - 3.1. Primer modelo: “incidencia_constante.mdl”**
 - 3.2. Segundo modelo: “tasaincidencia_constante.mdl”**
 - 3.3. Tercer modelo: “tasacontagio_constante.mdl”**

- 4. El Crecimiento Sigmoidal**
 - 4.1. Naturaleza Dinámica del Crecimiento Sigmoidal**
 - 4.2. Diagrama de Influencias y Diagrama de Forrester del Crecimiento Sigmoidal**
 - 4.3. Ejemplos de Crecimiento Sigmoidal**

4.3.1. Modelo “Población de Conejos”

4.3.2. Modelo “Edificación de Viviendas”

4.3.3. Modelo “Propagación de Enfermedades”

5. Modelo genérico sobre “Propagación de Enfermedades”

6. Bibliografía

Anexos

Tutorial de Vensim

Glosario de Ingeniería de Sistemas

1. INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA DE SISTEMAS

1.1. GENERALIDADES Y DEFINICIONES

Este documento está dedicado al estudio de la *dinámica de sistemas*. Mediante este nombre se alude a un método para el estudio del comportamiento de sistemas mediante la construcción de un modelo de simulación informática que ponga de manifiesto las relaciones entre la estructura del sistema y su comportamiento.

Como punto de partida conviene aclarar el sentido con el que se utilizarán los dos términos que aparecen en la anterior caracterización. En primer lugar, empezaremos por *sistema*¹. Este término se emplea con frecuencia, aunque con distintas acepciones. De modo coloquial hablamos de un sistema, como de un modo o manera de hacer algo; así, decimos que tenemos un sistema para resolver un problema o para alcanzar un objetivo. No es ese el sentido que aquí nos interesa. Más formalmente hablamos de un sistema como de un objeto dotado de alguna complejidad, formado por partes coordinadas, de modo que el conjunto posea una cierta unidad, que es precisamente el sistema. Así, hablamos del sistema planetario, formado por los planetas unidos mediante las fuerzas gravitatorias; de un sistema económico, formado por agentes económicos, relacionados entre sí por el intercambio de bienes y servicios; de un sistema ecológico, formado por distintas poblaciones, relacionadas mediante cadenas alimentarias o vínculos de cooperación; etc... Este es el uso del término sistema que vamos a adoptar.

Un sistema, en este sentido, lo entendemos como una unidad cuyos elementos interaccionan juntos, ya que continuamente se afectan unos a otros, de modo que operan hacia una meta común. Es algo que se percibe como una identidad que lo distingue de lo que la rodea, y que es capaz de mantener esa identidad a lo largo del tiempo y bajo entornos cambiantes.

Sin embargo, la consideración de que en la realidad todo está relacionado con todo puede pecar de excesivamente etérea, y resultar poco operativa. Por tanto, nos interesará

¹ Otras definiciones de *sistema* dadas por expertos en la materia son las siguientes:

Brian Gaines: Un sistema viene caracterizado por los tres hechos siguientes: 1) Es posible decir lo que pertenece y lo que no pertenece al sistema, 2) se puede especificar como interacciona el sistema con su entorno, y 3) el sistema admite un principio de ordenación jerárquica.

Ross Ashby: Un sistema viene representado por una lista de variables.

concentrarnos en ciertos aspectos de la realidad a los que se pueda considerar como sistemas, aunque para ello se tenga que prescindir de alguna de sus conexiones.

Nos vamos a centrar principalmente de la clase de sistemas caracterizada por el hecho de que se puede especificar claramente las partes que lo forman y las relaciones entre esas partes mediante las que se articulan en la correspondiente unidad. La descripción más elemental que podemos hacer de ellos es sencillamente enunciar ese conjunto de partes y establecer un esbozo de cómo se influyen esas partes entre sí. A esta descripción elemental asociaremos la imagen de un grafo (véase la figura 1.1), cuyos nodos son esas partes, y cuyas aristas representan las influencias que se producen entre ellas. Un ejemplo más concreto de grafo de un sistema se muestra en la figura 1.2 que muestra el grafo de un sistema demográfico. Este grafo aporta una descripción de naturaleza estructural del sistema, y diremos que representa su estructura. En el tema 2 se verá como se puede realizar esa descripción.

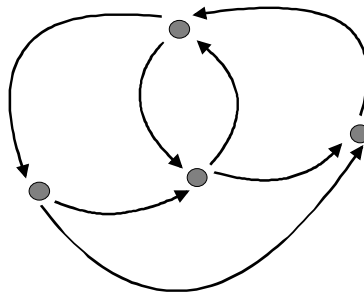


Figura 1.1. Grafo que representa un sistema.

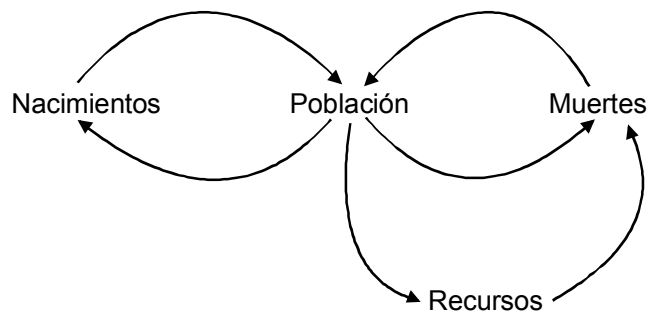


Figura 1.2. Grafo de un sistema demográfico.

El otro término que aparece en la locución *dinámica de sistemas* es *dinámica*. El término dinámica lo emplearemos por oposición a estática, y con él queremos expresar el carácter cambiante de aquello que adjetivamos con ese término. A algo que cambia se le suele asociar una imagen como la que se muestra en la figura 1.3, que muestra la trayectoria de una magnitud.

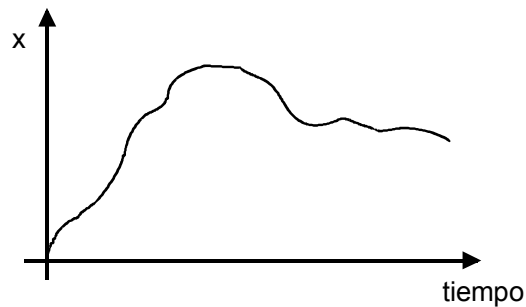


Figura 1.3. Trayectoria que describe el comportamiento de una magnitud x .

Al hablar de dinámica de sistemas nos referimos a que las distintas variables que podemos asociar a sus partes sufren cambios a lo largo del tiempo, como consecuencia de las interacciones que se producen entre ellas.

Otros conceptos que conviene revisar en este momento son los de *experimento*, *modelo* y *simulación*. El término *experimento* se puede definir como el proceso de extraer datos de un sistema mediante la activación de sus entradas. Con el término *modelo*, al igual que sucede con el de sistema, se emplea en múltiples sentidos. El que aquí nos interesa es el que se refiere al modelo como representación. El modelo es un objeto que representa a otro. En este sentido una definición muy apropiada es la que nos da *Marvin Minsky*: Para un observador O un objeto M es un modelo de un objeto S (un sistema) y un experimento (E), si O se puede servir de M para aplicar E y responder a cuestiones que le importan con relación a S .

Una característica importante a tener en cuenta es que la definición de Marvin Minsky no describe “modelos para sistemas *per se*”. Un modelo está siempre relacionado con el par sistema y experimento. Así cuando se escucha a alguien decir: “el modelo de ese sistema no es válido” no se puede saber de que están hablando, ya que un modelo de un sistema puede ser válido para un experimento y no serlo para otro. En este sentido, ningún modelo de un

sistema es válido para todos los posibles experimentos excepto el propio sistema o una copia idéntica del mismo.

Realizando experimentos recopilamos conocimientos del sistema, que al principio disponemos en una forma no estructurada. Al comprender cuales son las causas y cuales los efectos, y disponiendo las observaciones tanto en orden espacial como temporal, organizamos el conocimiento que se adquiere durante el experimento.

Las propiedades de un buen modelo se pueden resumir en las dos siguientes: 1) Debe de reflejar adecuadamente aquellas características del sistema que son de nuestro interés, y 2) debe ser lo suficientemente sencillo como para resultar manejable.

Para definir el término *simulación* podemos acudir a la definición que nos da *Granino Korn*: Una simulación es un experimento realizado sobre un modelo. Nuestro interés está en el subconjunto de simulaciones que son codificables como programas de ordenador (simulaciones matemáticas). Donde, una simulación matemática es una descripción codificada de un experimento que hace referencia al modelo al cual se aplica. Es muy importante, en este contexto, darse cuenta de la separación física entre la descripción del modelo y la descripción del experimento. No obstante existe un cierto peligro en esta separación, ya que podemos aplicar un experimento a un modelo para el cual este no resulta válido.

1.2. METODOLOGÍA SISTÉMICA

Para el estudio de los sistemas en general se ha desarrollado lo que se conoce como metodología sistémica, o conjunto de métodos mediante los cuales abordar los problemas en los que la presencia de sistemas es dominante. En realidad, la metodología sistémica pretende aportar instrumentos con los que estudiar aquellos problemas que resultan de las interacciones que se producen en el seno de un sistema, y no de las partes del sistema consideradas aisladamente.

El análisis de un sistema consiste en su disección, al menos conceptual, para establecer las partes que lo forman. Sin embargo, el mero análisis de un sistema no es suficiente; no basta con saber cuáles son sus partes. Para comprender su comportamiento necesitamos saber cómo se integran; cuáles son los mecanismos mediante los que se produce su coordinación. El especialista en sistemas, al estudiar un cierto aspecto de la realidad analiza cuáles son los

distintos elementos que lo forman, al tiempo que trata de especificar como se produce la integración de esos elementos en la unidad del problema que está analizando. Por tanto, para él, tanta importancia tiene el todo (el propio sistema) como las partes, y al considerar al sistema como una unidad lo hará sin perder de vista las partes que lo forman, pero al considerar las partes, no perderá de vista que son parte de un todo.

Aunque lo que se acaba de enunciar puede parecer muy abstracto, se irá viendo cómo la dinámica de sistemas aporta un ejemplo concreto de una metodología en la que se articulan el análisis y la síntesis, por lo que nos va a suministrar una muestra de una metodología sistémica.

En dinámica de sistemas vamos a ocuparnos de analizar cómo las relaciones en el seno de un sistema permiten explicar su comportamiento. Un sistema, como ya se ha definido, es un conjunto de elementos en interacción. Esta interacción es el resultado de que unas partes influyen sobre otras. Estas influencias mutuas determinarán cambios en esas partes. Por tanto, los cambios que se producen en el sistema son reflejo, en alguna medida, de las interacciones existentes. Los cambios en un sistema se manifiestan mediante su comportamiento (recuérdese la figura 1.2). Por otra parte, el conjunto de relaciones constituye lo que se denomina su estructura (recuérdese la figura 1.1). Por tanto, podemos decir que la dinámica de sistemas trata de poner de manifiesto cómo están relacionados la estructura y el comportamiento.

La metodología sistémica suministra también un lenguaje que aporta nuevas formas de ver los problemas complejos. Las herramientas que aporta la dinámica de sistemas, desde los diagramas de influencia hasta los modelos informáticos, nos van a permitir ver los sistemas que están en nuestro entorno mediante una óptica diferente que nos descubrirá aspectos en los que posiblemente no hayamos reparado y que, de este modo, nos permita alcanzar una visión más rica de la realidad.

1.3. APLICACIONES DE LA DINÁMICA DE SISTEMAS

La dinámica de sistemas es una metodología ideada para resolver problemas concretos. Inicialmente se concibió para estudiar los problemas que se presentan en determinadas empresas en las que los retrasos en la transmisión de información, unido a la existencia de estructuras de realimentación, dan lugar a modos de comportamiento no deseables,

normalmente de tipo oscilatorio. Originalmente se denominó dinámica industrial. Los trabajos pioneros se desarrollaron a finales de los años 50, y durante los 60 tiene lugar su implantación en los medios profesionales^{2, 3}. A mediados de los 60, Forrester propone la aplicación de la técnica que había desarrollado originalmente para los estudios industriales, a sistemas urbanos. Surge así lo que se denominó la dinámica urbana^{4, 5} en la que las variables consideradas son los habitantes en un área urbana, las viviendas, las empresas, etc. Una aplicación análoga a la dinámica urbana lo constituye la dinámica regional. Con estos modelos se pretende aportar un elemento auxiliar para la planificación urbana y regional, representando las interacciones que se producen entre las principales magnitudes socio-económicas del área correspondiente⁶, y generando, a partir de ellas, las evoluciones de las magnitudes consideradas significativas: habitantes, indicadores económicos, etc. para, a partir de estas evoluciones, planificar las necesidades de infraestructura y otras.

A finales de la década de los 60 se produce el estudio que posiblemente más haya contribuido a la difusión de la dinámica de sistemas. Se trata del primer informe al Club de Roma, sobre los límites al crecimiento, que se basó precisamente en un modelo de dinámica de sistemas, en el que se analizaba la previsible evolución de una serie de magnitudes agregadas a nivel mundial como son la población, los recursos y la contaminación^{7, 8}. En este modelo se analizaba la interacción de estas magnitudes y se ponía de manifiesto cómo, en un sistema, debido a las fuertes interacciones que se producen en su seno, la actuación sobre unos elementos, prescindiendo de los otros, no conduce a resultados satisfactorios. El informe correspondiente tuvo una gran incidencia en la opinión pública y ha sido objeto de múltiples debates, tanto a favor como en contra.

A raíz de la realización de este informe, se puso de manifiesto que la dinámica de sistemas era algo más que la dinámica industrial o la dinámica urbana, y se convino adoptar la denominación de dinámica de sistemas, con la que se conoce actualmente.

² Forrester, J. W., *Industrial Dynamics*, Productivity Press, 1986.

³ Roberts, E. B., *Managerial Applications of System Dynamics*, The MIT Press, 1978.

⁴ Alfeld, L. y A. Graham, *Introduction to Urban Dynamics*, Wright-Allen Press, 1976.

⁵ Forrester, J. W., *Urban Dynamics*, Productivity Press, 1986.

⁶ Hamilton, H. R., *System Simulation for Regional Analysis*, The MIT Press, 1969.

⁷ Forrester, J. W., *World Dynamics*, Productivity Press, 1974.

⁸ Meadows, D. H., D. L. Meadows, J. Randers y W. W. Behrens, *Dynamics of Growth in a Finite World*, Wright Allen Press, 1974.

Los campos de aplicación de la dinámica de sistemas son muy variados. Durante sus más de 40 años de existencia se ha empleado para construir modelos de simulación informática en casi todas las ciencias. Por ejemplo, en sistemas sociológicos ha encontrado multitud de aplicaciones, desde aspectos más bien teóricos como la dinámica social de Pareto o de Marx⁹, hasta cuestiones de implantación de la justicia¹⁰. Un área en la que se han desarrollado importantes aplicaciones es la de los sistemas ecológicos y medioambientales, en donde se han estudiado, tanto problemas de dinámica de poblaciones¹¹, como de difusión de la contaminación¹². Otro campo interesante de aplicaciones es el que suministran los sistemas energéticos, en donde se ha empleado para definir estrategias de empleo de los recursos energéticos^{13, 14}. Se ha empleado también para problemas de defensa, simulando problemas logísticos de evolución de tropas y otros problemas análogos¹⁵.

Más allá de las aplicaciones concretas que se acaban de mencionar, la difusión de estas técnicas ha sido muy amplia, y en nuestros días se puede decir que constituye una de las herramientas sistémicas más sólidamente desarrolladas y que mayor grado de aceptación e implantación han alcanzado.

A continuación se muestran una serie de enlaces de interés para complementar y profundizar sobre los temas relacionados con la dinámica de sistemas.

- <http://www.catunesco.upc.es/ads/ads.htm> Área de Dinámica de Sistemas, dirigida por el Prof. J. Martín García desde la Cátedra UNESCO de Desarrollo Sostenible, Desequilibrios y Cambio Global de la Universidad Politécnica de Cataluña.
- <http://web.mit.edu/sdg/www/> System Dynamics Group del Massachusetts Institute of Technology (MIT).
- <http://www.public.asu.edu/~kirkwood/sysdyn/SDRes.htm> College of Business at Arizona State University.

⁹ Hanneman, R. A., Computer-assisted Theory Building, Sage, 1988.

¹⁰ Jacobsen, C. y R. Bronson, Simulating Violators, ORSA, 1985.

¹¹ Gutiérrez, L. y W. Fey, Ecosystem Succession, The MIT Press, 1980.

¹² Meadows, D. H., D. L. Meadows, J. Randers y W. W. Behrens, Toward Global Equilibrium, Wright Allen Press, 1973.

¹³ Choucri, N., International Energy Futures, The MIT Press, 1981.

¹⁴ Naill, R. F., Managing the Energy Transition, Ballinger, 1977.

¹⁵ Wolstenholme, E., Systems Enquiry, Wiley, 1990.

- <http://www.isdefe.es/webisdefe.nsf/inicio?openpage> Literatura sobre dinámica de sistemas en castellano.

2. ESTRUCTURA Y COMPORTAMIENTO ELEMENTAL EN DINÁMICA DE SISTEMAS

2.1. UN LENGUAJE ELEMENTAL PARA LA DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS: DIAGRAMAS DE INFLUENCIAS

La descripción mínima de un sistema viene dada por la especificación de las distintas partes que lo forman y las relaciones que se establecen por las influencias de dichas partes. Veamos a continuación, con un sencillo ejemplo, cómo se puede analizar la estructura sistémica de un proceso. Supongamos el hecho elemental de llenar un vaso de agua. En la figura 2.1 se muestra una ilustración gráfica de este proceso. Su descripción, en lenguaje ordinario, es muy simple: el que llena el vaso de agua, mediante la observación del nivel alcanzado en el vaso, actúa sobre el grifo, de manera que lo va cerrando según se alcanza el nivel que considera oportuno. El proceso que tiene lugar lo describiríamos como sigue: el agente (el que llena el vaso) compara el nivel alcanzado en el vaso con el nivel deseado, si existe discrepancia actúa sobre el grifo, con lo que se influye sobre el nivel alcanzado, que es de nuevo comparado (en realidad se trata de un proceso continuo) con el nivel deseado; según disminuya la discrepancia, se irá cerrando el grifo, hasta que al anularse esta, se cierre definitivamente. En el diagrama se indican los elementos más importantes que intervienen en el proceso. Estos elementos básicos del proceso están unidos entre sí mediante flechas que indican las influencias que se establecen entre ellos. Por ejemplo, el nivel alcanzado depende del flujo de agua o, lo que es lo mismo, el flujo de agua influye sobre el nivel alcanzado, lo que se indica, en el diagrama, mediante una flecha que va desde “flujo de agua” a “nivel”. Esta relación de influencia se escribe:

FLUJO DE AGUA → NIVEL

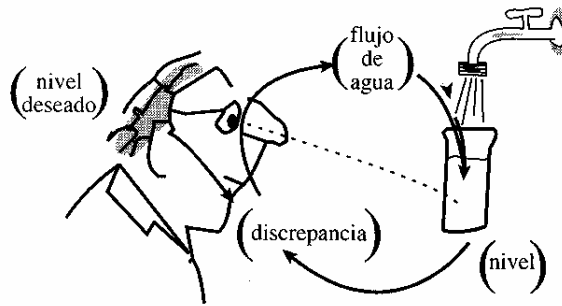


Figura 2.1. Grafo orientado del proceso de llenar un vaso de agua.

De forma análoga, la “discrepancia” se determina a partir del “nivel deseado” y del “nivel” alcanzado. Por último, la “discrepancia” determina el “flujo de agua”.

Este ejemplo constituye una muestra de cómo se puede analizar un sistema, descomponerlo en sus elementos esenciales, y relacionar estos elementos mediante un bosquejo de cómo se producen las influencias entre ellos. De este modo se tiene la descripción más elemental que podemos tener de ese sistema, que se limita a establecer que partes lo forman y cuáles de ellas se influyen entre sí. La influencia, en esta descripción, se mantiene a un nivel cualitativo, en el sentido de que únicamente se dice si se produce o no influencia, pero no la forma o magnitud que tenga. En general, si **A** y **B** son dos partes de un sistema, el hecho de que **A** influya sobre **B** se representa mediante una flecha de la forma $A \rightarrow B$ e indica que **B** es una función de **A**, es decir $B = f(A)$, aunque no conozcamos la forma matemática exacta de la función.

El conjunto de las relaciones entre los elementos de un sistema recibe la denominación de *estructura* del sistema y se representa mediante el *diagrama de influencias* o causal. El diagrama de influencias de la figura 2.1 constituye un ejemplo de la estructura de un sistema.

En su forma más simple el diagrama de influencias está formado por lo que se conoce como un grafo orientado. A las flechas que representan las aristas se puede asociar un signo. Este signo indica si las variaciones del antecedente y del consecuente son, o no, del mismo signo. Supongamos que entre **A** y **B** existe una relación de influencia positiva:

$$A \xrightarrow{+} B$$

Ello quiere decir que si **A** se incrementa, lo mismo sucederá con **B**; y, por el contrario, si **A** disminuye, así mismo lo hará **B**. Por otra parte, si la influencia fuese negativa a un

incremento de **A** seguiría una disminución de **B**, y viceversa. De este modo, asociando un signo a las relaciones de influencia, se tiene un diagrama que suministra una información más rica sobre la estructura del sistema, aunque continúe conservando su carácter cualitativo. En la figura 2.2 se muestra el diagrama de llenar un vaso, con un grafo de este tipo.

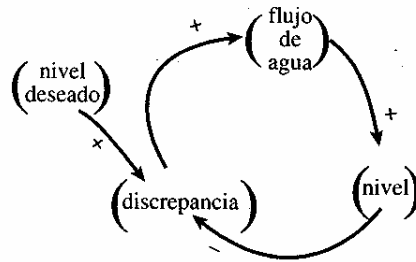


Figura 2.2. Diagrama de influencias con signos del proceso de llenar un vaso.

A continuación vamos a presentar instrumentos adicionales que nos van a permitir reelaborar los diagramas de influencias para convertirlos en unos objetos matemáticos más ricos, que reciben la denominación de sistemas dinámicos, y que programados con ayuda de un ordenador permitirán generar las trayectorias que representan el comportamiento de los sistemas.

2.2. DIAGRAMAS DE FORRESTER

La estructura de un sistema, tal como se ha presentado en la sección anterior, puede aparentar tener un carácter esencialmente estático. Ahora cabe preguntarse cómo dar razón de la generación endógena del comportamiento. Para ello, partiremos de la observación de que entre los distintos elementos que aparecen en los nodos de un diagrama de influencias, algunos representan variaciones con respecto al tiempo de otras magnitudes consideradas en ese mismo diagrama. Por ejemplo, en el diagrama de la figura 2.2 la variable flujo de agua representa la variación con respecto al tiempo del nivel alcanzado por el fluido en el vaso. Recordando esa figura se tiene:

$$\text{FLUJO} \xrightarrow{+} \text{NIVEL}$$

Esta influencia es un caso particular de otra más general que podemos expresar de la forma:

$$\frac{dX}{dt} \xrightarrow{+} X \quad (2.1)$$

En la que dX/dt denota la variación con respecto al tiempo de la magnitud X . Esta variación representa una relación trivial: la variación con respecto al tiempo de X influye en el crecimiento de la propia variable X . Sin embargo, lo que interesa por el momento resaltar es que la existencia, en el diagrama de influencias, de variables que representan la variación con respecto al tiempo de otras, comporta que estas últimas varíen a lo largo del tiempo. En este sencillo hecho se basa el que podamos decir que en la estructura está implícito el comportamiento del sistema.

Conviene también observar que siempre que tengamos una variable del tipo dX/dt , que representa la variación de una magnitud X con respecto al tiempo, se tendrá una relación de influencia como la de la expresión (2.1). La variable X resulta de la acumulación del cambio implícito en la variable dX/dt . Por tanto, siempre que aparezca una variable como la dX/dt aparecerá una X , y entre ambas se establecerá una relación como la (2.1). Por analogía con el ejemplo de la figura 2.1, la variable X se denomina *variable de nivel* y la variable dX/dt *variable de flujo*. En la literatura matemática a la variable de nivel se la conoce también como *variable de estado*.

Las anteriores consideraciones llevaron a Forrester a postular una clasificación de las distintas variables que aparecen en un diagrama de influencias en tres grupos: variables de estado, variables de flujo y variables auxiliares. Las variables de nivel son normalmente las variables más importantes y representan esas magnitudes cuya evolución es especialmente significativa. Asociada a cada variable de nivel se encuentran una o varias variables de flujo, que determinan su variación a lo largo del tiempo. Por último, las variables auxiliares son el resto de las variables que aparecen en el diagrama, y representan pasos intermedios para la determinación de las variables de flujo a partir de las variables de nivel.

Si somos capaces de realizar esa clasificación vamos a dar un paso significativo para llegar a una descripción del sistema más formalizada. Por tanto, una vez clasificados los elementos que aparecen en el diagrama de influencias en variables de estado, flujo y auxiliares estamos en disposición de obtener, a partir del diagrama de influencias, lo que se conoce como el *diagrama de Forrester*, que es uno de los elementos básicos de la dinámica de sistemas.

A las variables de estado, flujo y auxiliares se asocian unos iconos (gráficos) como los que se indican en la figura 2.3, en la que a una variable de estado se asocia un rectángulo, a una de flujo un icono que recuerda una válvula y a una variable auxiliar mediante un círculo.

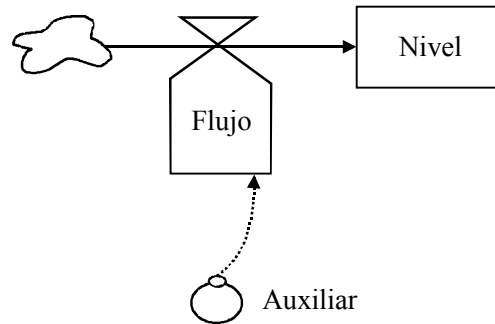


Figura 2.3. Representación gráfica de las variables de estado, flujo y auxiliar en el diagrama de Forrester.

En este punto conviene indicar que los símbolos (iconos gráficos) que se han utilizado son los que inicialmente propuso Forrester, pero que, en la actualidad, no son empleados de forma universal, y se dibujan estos diagramas con cierta libertad a la hora de escoger símbolos. De todas formas independientemente del conjunto de símbolos que se escojan para representar estos diagramas la similitud entre ellos hace que no exista ningún problema en la comprensión de los mismos.

En la Tabla 2.1 se muestran todos los símbolos utilizados originalmente en los diagramas de Forrester.

En la figura 2.4 se tiene el diagrama de Forrester del proceso de llenar un vaso. Este diagrama se ha obtenido particularizando los elementos que aparecen en el de la figura 2.2, convirtiendo cada uno de ellos en una variable de estado, de flujo o auxiliar.

La variable “Nivel” es una variable de estado, la variable “Flujo de Agua” es una variable de flujo y la variable “Discrepancia” es una variable auxiliar, ya que representa un paso intermedio en la determinación de “Flujo de Agua”. Además, en la figura 2.4 se indican mediante los símbolos “K” y “Nivel Deseado” las constantes que aparecen en el modelo. Donde “K” representa la proporción de agua que se deja pasar en función de la “Discrepancia” existente.










	Nube: representa una fuente o un pozo; puede interpretarse como un estado que no tiene interés y es prácticamente inagotable.
	Estado: representa una acumulación de un flujo.
	Flujo: Variación de un estado; representa un cambio en el estado del sistema.
	Canal de material: canal de transmisión de una magnitud física que se conserva.
	Canal de información: Canal de transmisión de una cierta información, que no es necesario que se conserve.
	Variable auxiliar: una cantidad con un cierto significado físico en el mundo real y con un tiempo de respuesta instantáneo.
	Constante: un elemento del modelo que no cambia de valor.
	Retraso: un elemento que simula retrasos en la transmisión de información o de material.
	Variable exógena: variable cuya evolución es independiente de las del resto del sistema. Representa una acción del medio sobre el sistema.

Tabla 2.1. Símbolos utilizados originalmente en los diagramas de Forrester.

Por último, en la misma figura, aparece, en el extremo superior izquierdo, una fuente que representa una fuente, o un sumidero, que no es relevante para la descripción del sistema. Se podría prescindir de él pero se incluye para dar mayor coherencia al diagrama.

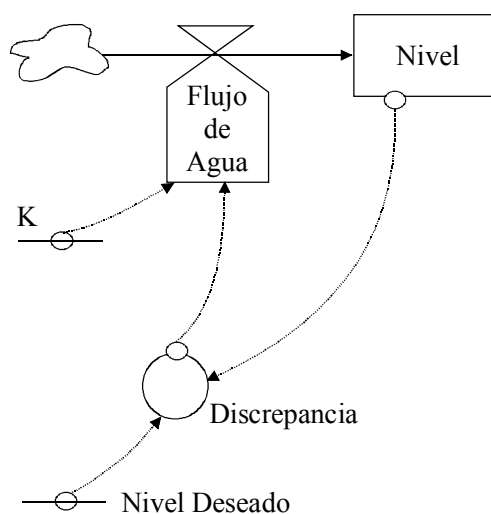


Figura 2.4. Diagrama de Forrester del proceso de llenar un vaso.

2.3. MODELO MATEMÁTICO

Una vez visto en la sección anterior la construcción de los diagramas de Forrester, en esta sección, se muestra como a dicho diagrama se asocian las ecuaciones funcionales del modelo. En primer lugar consideremos la relación entre la variable “Flujo de Agua” (a partir de ahora la denominaremos **FA**) y la variable “Nivel” (denominada **N**). La evolución de esta variable de estado (“Nivel”) viene dada por la expresión:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \cdot FA(t) \quad (2.2)$$

que indica que el “Nivel” **N** en el instante de tiempo **t + Δt** se obtiene sumando al “Nivel” que existía en el tiempo **t** el “Flujo de Agua” que se ha producido en el periodo de tiempo entre **t** y **t + Δt**. La ecuación anterior recibe la denominación de *ecuación de estado*, e indica como evoluciona la variable de estado **N** en función del flujo **FA** que determina su variación. Esta ecuación se puede escribir también, empleando notación diferencial, de forma alternativa:

$$\frac{dN}{dt} = FA(t) \quad (2.3)$$

El “Flujo de Agua” **FA** se determina con ayuda de la expresión:

$$FA(t) = K \cdot D(t) \quad (2.4)$$

donde **K** representa una constante y **D** representa a la variable “Discrepancia”. Esta ecuación, que se denomina *ecuación de flujo*, establece que el “Flujo de Agua” se obtiene multiplicando la constante **K** por la “Discrepancia”. Las ecuaciones de este tipo (ecuaciones de flujo) permiten determinar una variable de flujo a partir de determinados parámetros del modelo (en este caso **K**), de variables auxiliares (como **D**) y/o de variables de estado. El parámetro **K** toma un valor constante para cada simulación del modelo.

En el modelo aparece también la variable auxiliar “Discrepancia” **D**, que viene dada por:

$$D(t) = ND - N(t) \quad (2.5)$$

es decir, como la diferencia entre el “Nivel Deseado” **ND** y el “Nivel” **N**.

Conviene observar que en el modelo además de la variable de estado **N**, el flujo **FA** y la variable auxiliar **D** también han aparecido unos parámetros **ND** y **K**.

En general, a los parámetros hay que darles un valor numérico para que el modelo se refiera a una situación concreta. Ello se hace habitualmente de una de las dos formas siguientes: 1)

Bien se atiende al significado concreto de esos parámetros, y se dispone de información numérica suficiente para conocer sus valores. Esta información será suministrada por los correspondientes especialistas 2) O bien, en los casos en los que no se disponga de información sobre los valores de los parámetros, pero sin embargo se disponga de datos con relación a la evolución de las magnitudes significativas del sistema en un periodo de tiempo determinado, se pueden emplear técnicas de ajuste de parámetros. Estas técnicas consisten, esencialmente, en determinar los valores numéricos de los parámetros que minimizan algún índice que mida la discrepancia entre los datos históricos de evolución del proceso y los generados por el sistema dinámico.

Hasta ahora, con la escritura de las ecuaciones del modelo, o lo que es lo mismo con el dibujo del diagrama de Forrester, la única información que se ha considerado es de naturaleza cualitativa. La información cuantitativa se emplea posteriormente para asignar valores numéricos a los parámetros que intervienen en esas expresiones.

El ejemplo que acabamos de ver muestra los elementos básicos en la descripción de un sistema. Sin embargo, en este ejemplo falta un elemento muy importante: la *función tabla*. Esta función permite representar dependencias no lineales entre variables. Por ejemplo, supongamos que la variable auxiliar **B** es función de **A**, mediante una expresión de la forma $B = f(A)$. Supongamos que la función f tiene la forma que se indica en la figura 2.5. Es habitual que esta función se de mediante una tabla de valores correspondientes a determinados valores de **A**. A ello obedece la denominación de función de tabla. En un diagrama de Forrester se representa mediante un círculo tal como se indica en la figura 2.5.

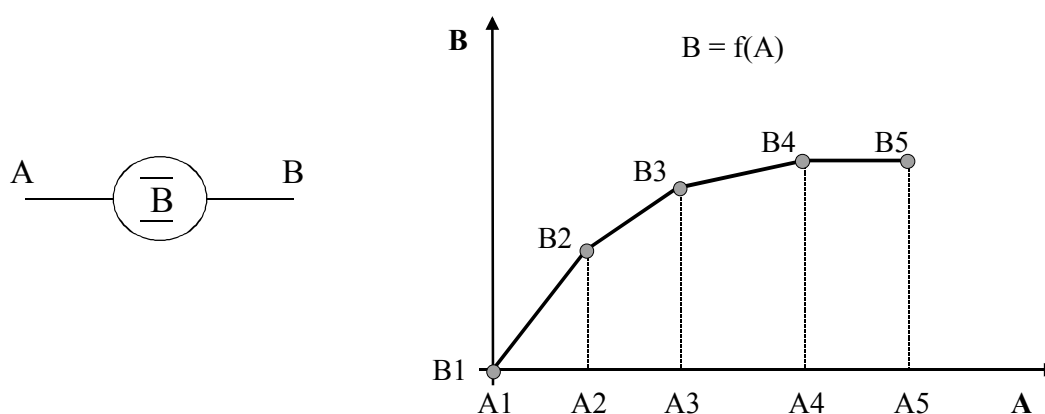


Figura 2.5. Representación gráfica de las funciones tabla en el diagrama de Forrester.

Desde un punto de vista matemático es importante observar que mediante las funciones tablas se describen las no-linealidades del sistema que vienen dadas por puntos. Además, pueden tenerse no-linealidades mediante expresiones analíticas.

Con lo visto hasta aquí hemos completado el proceso mediante el cual a partir de un diagrama de influencias, que representa la descripción más elemental que podemos hacer de un sistema, hemos sido capaces de obtener el diagrama de Forrester, especializando los distintos elementos que aparecen en él, a partir del cual tenemos un objeto matemático muy elaborado, que es un sistema dinámico, el cual puede ser programado en un ordenador. Para ello se recurre a lenguajes o entornos informáticos de simulación adecuados. Aunque la programación de un modelo como el que se ha venido describiendo puede hacerse en cualquier lenguaje de alto nivel, resulta más cómodo emplear los que se han desarrollado para tal efecto.

En la actualidad se dispone de entornos de simulación muy flexibles que permiten construir un modelo de forma gráfica, en la pantalla del ordenador, empleando iconos, de modo que, combinando éstos, se llega al diagrama de Forrester de forma directa. Estos entornos, una vez se ha construido este diagrama en la pantalla, generan automáticamente las ecuaciones. En este módulo utilizaremos el entorno de simulación Vensim. En el CDROM se incluye un tutorial sobre Vensim donde se explican las características y funcionalidades básicas de este entorno informático. Además, se presenta el desarrollo completo (paso a paso) de un ejemplo. Vensim es un entorno informático, desarrollado por Ventana Systems Inc (<http://www.vensim.com>).

2.4. BUCLE DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA

Una estructura básica en el estudio del comportamiento de un sistema es la estructura de realimentación. La realimentación nos va a proporcionar una transmisión de información circular de forma continua. Esta estructura circular aparece en muchas situaciones (como ejemplo véase la figura 2.2) y está en el origen de comportamientos complejos.

El proceso de llenado de un vaso es un sencillo ejemplo de un bucle de realimentación negativa. Veamos a continuación con más detalle el comportamiento de un sistema con esta estructura. Si suponemos una variación en alguno de los elementos de la figura 2.6, por

ejemplo un incremento en **A**, este incremento producirá, de acuerdo con el signo de la influencia, un decremento de **C**, que a su vez determinará un decremento de **B**. Este último decremento de **B** producirá un decremento de **A**. Es decir, mediante la cadena causal circular, el incremento inicial de **A** se ha contrarrestado. Cualquier modificación (incremento o decremento) en cualquiera de los elementos vuelve a él, a lo largo de la cadena, con una acción de signo contrario. Se comprende así el carácter autorregulador del sistema que posee esta estructura. Las trayectorias correspondientes a este tipo de estructura se muestran en la figura 2.6.

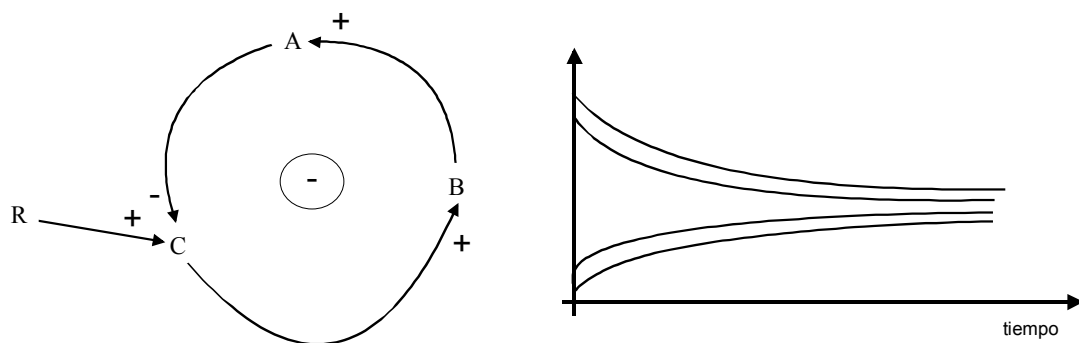


Figura 2.6. Grafo genérico y comportamiento de la estructura de realimentación negativa.

El modo de comportamiento autorregulador depende de la estructura del sistema; es decir, de la forma de organizarse los distintos elementos que lo forman en una cadena de influencias circular. Cualquiera que sea la naturaleza de los componentes, siempre que se tenga una estructura de realimentación negativa, se tendrá un comportamiento autorregulador. Así sucede en múltiples ámbitos de la realidad, y se tienen procesos autorregulados tanto en sistemas artificiales (por ejemplo los sistemas de regulación) como en sistemas naturales (por ejemplo los procesos homeostáticos en los seres vivos).

◆ **FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE UN BUCLE ELEMENTAL DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA**

A continuación se presenta una formulación matemática elemental de un sistema con una estructura de realimentación negativa. En la figura 2.7 se muestra un bucle de realimentación negativa elemental. Los elementos básicos de este bucle son:

- el estado del sistema x ,
- la acción o Flujo F ,

- la discrepancia D ,
- el objetivo o estado deseado x_d .

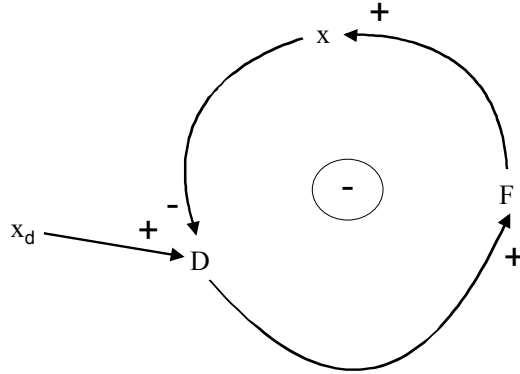


Figura 2.7. Elementos básicos de un bucle de realimentación negativa elemental.

Con el fin de introducir una hipótesis dinámica en el sistema, se supone que el estado representa la acumulación de acciones pasadas.

Se asume además, que la relación entre el estado x y la acción F viene dada por una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F \quad (2.6)$$

por tanto como el estado es la acumulación de acciones pasadas, se puede escribir:

$$x = \int_0^t F dt \quad (2.7)$$

Los restantes elementos del bucle vienen dados por las ecuaciones:

$$F = k \cdot D$$

$$D = x_d - x$$

De estas dos últimas expresiones se obtiene que:

$$F = k(x_d - x) \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ecuación (2.8) en la ecuación (2.6) e integrando la ecuación, se tiene:

$$x(t) = x_d + (x(0) - x_d) \cdot e^{-kt} \quad (2.9)$$

que representa la evolución temporal de la variable de estado. Su representación gráfica se muestra en la figura 2.8.

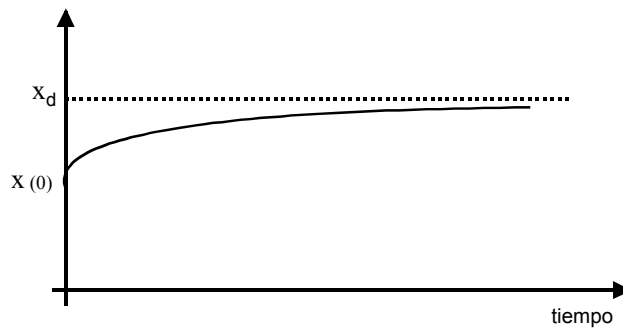


Figura 2.8. Trayectoria de un sistema elemental de realimentación negativa.

En la figura 2.9 se muestra el diagrama de Forrester de un sistema elemental de realimentación negativa.

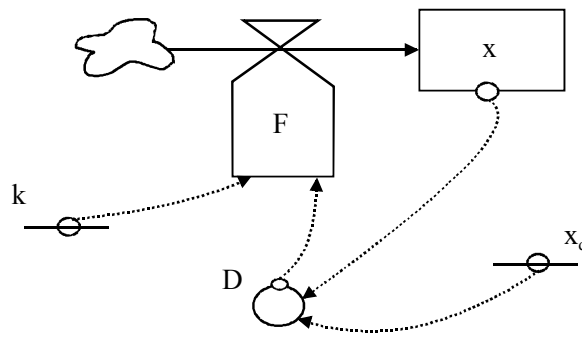


Figura 2.9. Diagrama de Forrester de un sistema elemental de realimentación negativa.

El archivo “**bucle_elemental_neg.mdl**” permite jugar con los parámetros del bucle de realimentación negativa y reproducir las distintas trayectorias que se generan a partir de la función temporal (2.9). El alumno podrá así observar como influyen en un bucle de realimentación negativa cualquiera de los tres parámetros (x_0 , x_d y k). La figura 2.10 muestra el aspecto que presenta el modelo “bucle_elemental_neg” cuando se selecciona el modo “SyntheSim” en el entorno Vensim.

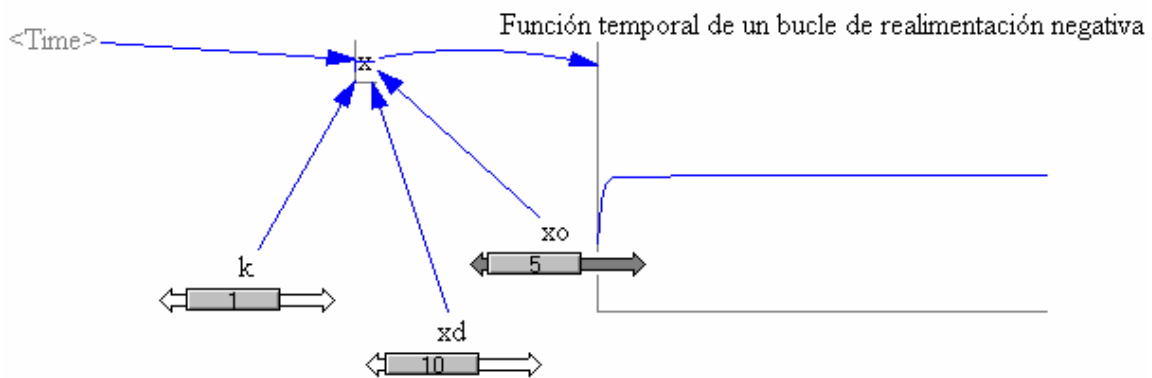


Figura 2.10. Modelo de un bucle de realimentación negativa, "bucle_elemental_neg.mdl".

2.5. BUCLE DE REALIMENTACIÓN POSITIVA

En la figura 2.11 se muestra la estructura general de un bucle de realimentación positiva. En él la perturbación de cualquier elemento tiende a reforzarse a lo largo de la cadena, por lo que, por ejemplo, un incremento de **A** determina a su vez su propio reforzamiento. En la figura 2.11 se puede observar el comportamiento de un sistema con este tipo de estructura. El comportamiento que resulta de un bucle de esta naturaleza consiste en acelerar o bien el crecimiento, o el declive. El ejemplo más simple de un sistema que posea esta estructura es el de una población que crece sin ninguna limitación. Cuanto mayor sea el número de individuos, mayor será su descendencia, que incrementará a su vez el número de individuos, realimentándose el bucle sin parar.

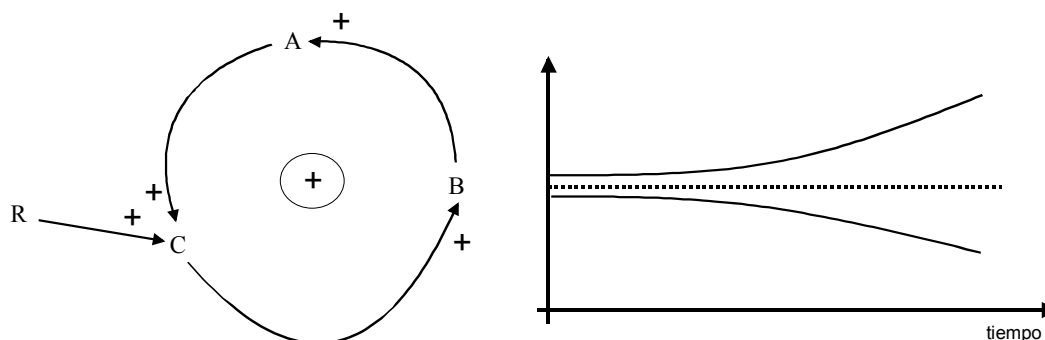


Figura 2.11. Grafo genérico y comportamiento de la estructura de realimentación positiva.

En general, los procesos de crecimiento se pueden explicar mediante bucles de realimentación positiva. Pero hay que tener en cuenta el carácter fuertemente inestabilizador que tienen este tipo de bucles, al contrario de lo que sucede con los de realimentación negativa, que son, estabilizadores.

En realidad, los procesos de crecimiento (o declive) acelerado no se producen en la naturaleza, o en los sistemas sociales, hasta sus últimas consecuencias, porque todo proceso de crecimiento tarde o temprano encuentra unos límites que abortarán dicho crecimiento.

◆ **FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE UN BUCLE ELEMENTAL DE REALIMENTACIÓN POSITIVA**

Análogamente, como en el caso del bucle de realimentación negativa, es posible tener una formulación matemática del bucle de realimentación positiva en su caso más elemental. Los elementos básicos de esta formulación son:

- el estado del sistema x , y
- la acción o Flujo F ,

y se organizan como se muestra en la figura 2.12.

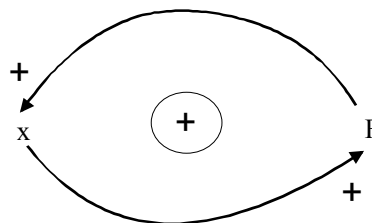


Figura 2.12. Elementos básicos de un bucle de realimentación positiva elemental.

Se procede de forma análoga a como se hizo en el caso de un bucle de realimentación negativa, y se adopta la hipótesis de una relación entre el estado y la acción de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = F \quad (2.10)$$

es decir,

$$x = \int_0^t F dt \quad (2.11)$$

Si se asume que la acción es proporcional al estado:

$$F = k \cdot x \quad (2.12)$$

Sustituyendo la ecuación (2.12) en la ecuación (2.10) e integrando la ecuación, se tiene:

$$x(t) = x(0) \cdot e^{kt} \quad (2.13)$$

que representa la evolución temporal de la variable de estado. El comportamiento del sistema viene dado por la figura 2.13, y como se puede observar crece exponencialmente con el tiempo.

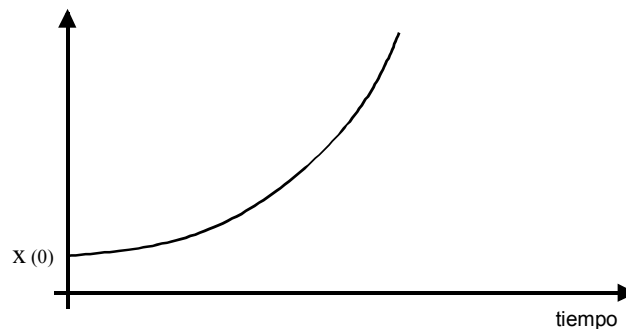


Figura 2.13. Trayectoria de un sistema elemental de realimentación positiva.

En la figura 2.14 se muestra el diagrama de Forrester de un sistema elemental de realimentación positiva.

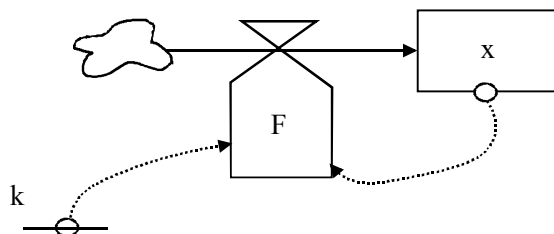


Figura 2.14. Diagrama de Forrester de un sistema elemental de realimentación positiva.

El archivo “**bucle_elemental_pos.mdl**” permite jugar con los parámetros del bucle de realimentación positivo y reproducir las distintas trayectorias que se generan a partir de la función temporal (2.13). El alumno podrá así observar como influyen en un bucle de realimentación positiva cualquiera de los dos parámetros (x_0 y k). La figura 2.15 muestra el aspecto que presenta el modelo “bucle_elemental_pos” cuando se selecciona el modo “SyntheSim” en el entorno Vensim.

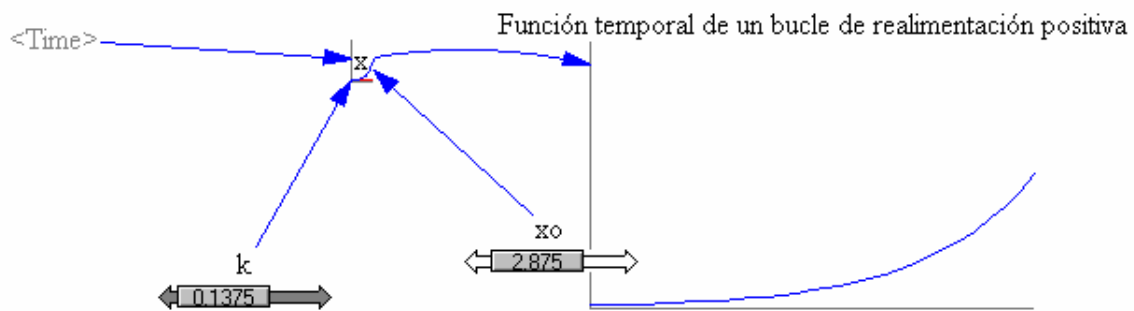


Figura 2.15. Modelo de un bucle de realimentación positiva, “bucle_elemental_pos.mdl”.

2.6. SISTEMAS COMPLEJOS Y ESTRUCTURAS GENÉRICAS

Los bucles de realimentación negativa y positiva constituyen los ejemplos más simples de estructura de un sistema capaces de generar comportamiento de forma autónoma. Sin embargo, en los sistemas con los que habitualmente nos encontramos no es frecuente que admitan una descripción en la que aparezca exclusivamente una de esas estructuras. Por el contrario, lo habitual es que nos encontremos con sistemas complejos en los que coexistan múltiples bucles de realimentación, tanto positivos como negativos. En tal caso el comportamiento resultante dependerá de cuáles de los bucles sean dominantes en cada momento. De estas combinaciones hay algunas particularmente interesantes, a las que se alude como *arquetipos sistémicos*.

Los arquetipos sistémicos son determinadas pautas estructurales que se presentan en múltiples situaciones. Se denominan también *estructuras genéricas*. Suministran “plantillas” que nos ayudan a establecer una primera estructura de determinadas situaciones. Sin embargo, al tratarse de estructuras complejas de realimentación, la relación entre estructura y comportamiento no es tan clara como en los casos que hemos visto en las secciones anteriores. En la actualidad se han publicado del orden de doce de estos arquetipos¹⁶, entre los que cabe destacar el de *crecimiento sigmoidal* y el de la *adicción*.

¹⁶ P. Senge, 1990, *The Fifth Discipline*, DoubleDay.

3. VISIÓN SISTÉMICA DE LA INCIDENCIA Y DE LA PREVALENCIA

En este apartado se presentan, de forma gradual, tres modelos dinámicos para dar una visión sistémica de los dos tipos de medidas absolutas de la frecuencia de resultados de una enfermedad: incidencia y prevalencia¹⁷. Consideraremos la *incidencia* como una medida del número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo y la *prevalencia* como una medida instantánea del % de la población total que está enferma o presenta cierto trastorno causado por la enfermedad.

Los tres modelos, que se han programado en Vensim y se incluyen en el CD del curso, también nos van a permitir reproducir ejemplos numéricos de tres tipos de comportamientos dinámicos: el crecimiento lineal, el crecimiento exponencial asintótico y el crecimiento sigmoideal. Pero como cada modelo se acompaña además de una propuesta de ejercicios, el alumno podrá practicar y profundizar en estos tipos de crecimientos.

3.1. PRIMER MODELO: “INCIDENCIA_CONSTANTE.MDL”

Objetivo: Repaso de los términos “población susceptible”, “incidencia” y “prevalencia”, bajo la hipótesis (poco realista) de que la incidencia es constante.

Variables del modelo (tipo y significado):

poblacion susceptible	<i>Variable de estado.</i> Número de personas susceptibles de contraer la enfermedad
poblacion enferma	<i>Variable de estado.</i> Número de personas enfermas o con cierto trastorno producido por la enfermedad
Incidencia	<i>Variable de flujo.</i> Número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo
Prevalencia	<i>Variable auxiliar.</i> Proporción de la población total que está enferma o presenta cierto trastorno causado por la enfermedad
Valor de la incidencia	<i>Parámetro</i> para hacer que el valor de la incidencia sea constante mientras exista población susceptible de contraer la enfermedad

¹⁷ M. Szklo y J. Nieto. “Epidemiología Intermedia: Conceptos y Aplicaciones”, Díaz de Santos, 2003.

unidad de tiempo *Constante* igual a la unidad de tiempo, utilizada para conseguir cuadrar las unidades en la expresión de la incidencia

Ecuaciones del modelo:

$$\text{Incidencia}(t) = \min \left(\text{Valor de la incidencia}, \frac{\text{poblacion susceptible}(t)}{\text{unidad de tiempo}} \right) \quad (3.1)$$

$$\frac{d(\text{poblacion susceptible}(t))}{dt} = - \text{Incidencia}(t) \quad (3.2)$$

$$\frac{d(\text{poblacion enferma}(t))}{dt} = \text{Incidencia}(t) \quad (3.3)$$

$$\text{Prevalencia}(t) = \frac{\text{poblacion enferma}(t)}{\text{poblacion susceptible}(t) + \text{poblacion enferma}(t)} \quad (3.4)$$

Justificación a las ecuaciones: Las ecuaciones diferenciales (3.2) y (3.3) indican respectivamente que la incidencia descontará elementos de la población susceptible e incrementará elementos en la población enferma. La ecuación (3.4) traduce a expresión matemática la definición que estamos utilizando de la prevalencia. Sin embargo la ecuación (1) merece una cierta aclaración, en esta ecuación se utiliza la función matemática mínimo (abreviada como *min*) para que el valor instantáneo de la *Incidencia* sea siempre el mismo, igual al valor de la variable *Valor de la incidencia* salvo que la *poblacion susceptible* sea menor que ella. La ecuación alternativa hubiera sido

$$\text{Incidencia}(t) = \text{Valor de la incidencia}$$

pero con esta ecuación se hubiera llegado a valores negativos de la población susceptible.

Modelo en Vensim: La figura 3.1 muestra el aspecto que presenta el modelo “**incidencia_constante.mdl**” en el entorno Vensim. El modelo se acompaña de “cuatro grupos de gráficos”, accesibles a través de *Control Panel*, con los nombres

POBLACIONES, TODAS_LAS_VARIABLES, INCIDENCIA, PREVALENCIA, para facilitar el análisis de resultados.

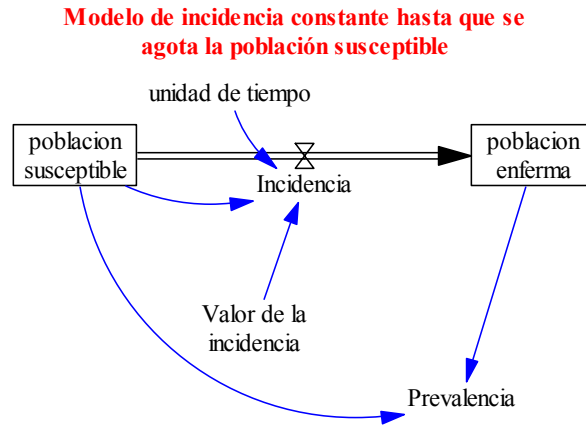


Figura 3.1. Modelo “incidencia_constante”.

Ejemplo: Con población susceptible(0) = 1000 personas, población enferma (0) = 0 y un valor constante de la incidencia = 50 personas/día. Se obtienen los resultados recogidos en las Figuras 3.2a y 3.2b.

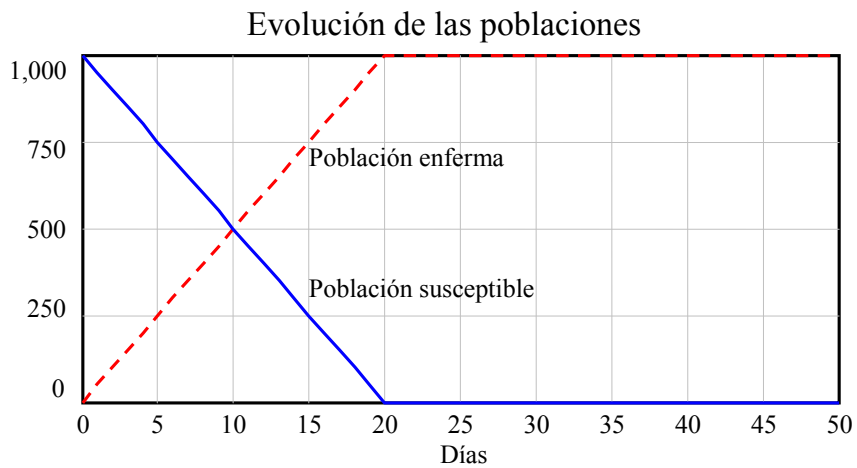


Figura 3.2a. Crecimiento y decrecimiento lineal de las respectivas poblaciones cuando la incidencia es constante.

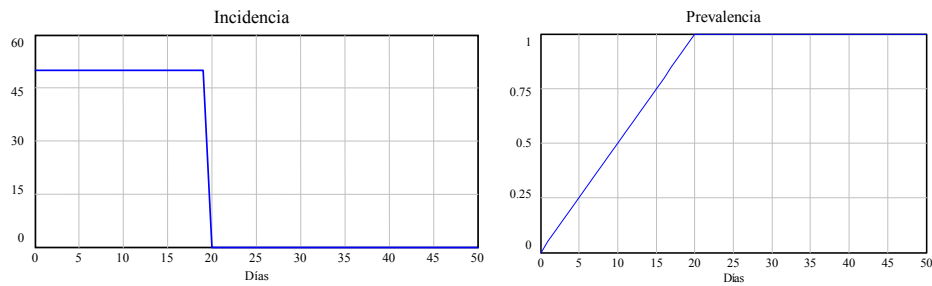


Figura 3.2b. Evolución de la incidencia y de la prevalencia.

Discusión de resultados: Toda la población susceptible acaba estando enferma a los 20 días, pues a razón de 50 casos nuevos diarios, el total de casos acumulados iguala en el día 20 a la población inicial. La población susceptible presenta un decrecimiento lineal, directamente proporcional a la incidencia, hasta que se agota. La población enferma presenta el crecimiento lineal, complementario al de la población susceptible. La prevalencia tiene también un crecimiento lineal, directamente proporcional a la incidencia, hasta alcanzar la unidad en el día 20. La siguiente función matemática describe el crecimiento que ha sufrido la población enferma:

$$\text{poblacion enferma (t)} = \text{poblacion enferma(0)} + \text{Valor de la incidencia} \cdot t$$

La misma que hubiera resultado de integrar la ecuación diferencial

$$\frac{d(\text{poblacion enferma}(t))}{dt} = \text{Valor de la incidencia}$$

Diagrama de influencias: En la figura 3.3 se muestra el diagrama de influencias correspondiente a este modelo dinámico cuando aún no se ha alcanzado el valor nulo de la población susceptible. El diagrama recoge que la incidencia afecta negativamente a la población susceptible y positivamente a la población enferma, mientras que la prevalencia se ve afectada positivamente por la población enferma y negativamente por la población susceptible. No existe ningún bucle ni positivo ni negativo en el modelo. Mientras haya incidencia, la población susceptible estará disminuyendo y la población enferma estará aumentando en la misma cantidad.

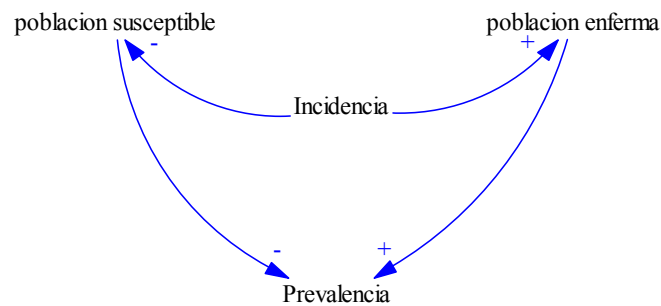


Figura 3.3. Diagrama de influencias con incidencia constante.

Simil hidráulico: La figura 3.4 muestra un símil hidráulico de esta situación; hay dos depósitos, el primero contiene a la población susceptible y el segundo a la población enferma, y mediante una bomba se está bombeando una cantidad constante (incidencia) de personas por unidad de tiempo de una población a otra. En la situación inicial el primer depósito está lleno (1000 personas) y el segundo depósito está vacío, pero al cabo de un tiempo es el primer depósito el que está vacío y el segundo depósito el que contendrá a las 1000 personas. En las situaciones intermedias, el segundo depósito habrá subido lo que haya bajado el primero.

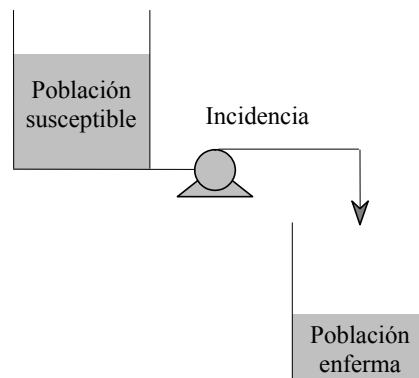


Figura 3.4. Símil hidráulico cuando la incidencia es constante.

Propuestas de ejercicios:

1ª) Simular y comparar otras situaciones para valores de la incidencia menores y mayores que 50.

2ª) Simular y comparar otras situaciones con valores de la población enferma inicial distinta de cero.

3.2 Segundo modelo: “tasaincidencia_constante.mdl”

Objetivo: Repaso de los términos “población susceptible”, “incidencia” y “prevalencia”, bajo la hipótesis (algo más realista) de que la tasa de incidencia es constante.

Variables del modelo (tipo y significado):

poblacion susceptible	<i>Variable de estado.</i> Número de personas susceptibles de contraer la enfermedad
poblacion enferma	<i>Variable de estado.</i> Número de personas enfermas o con cierto trastorno producido por la enfermedad
Incidencia	<i>Variable de flujo.</i> Número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo
Prevalencia	<i>Variable auxiliar.</i> Proporción de la población total que está enferma o presenta cierto trastorno causado por la enfermedad
Tasa de incidencia	<i>Parámetro.</i> Cociente entre el número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo, y el número de personas que componen la población de la que surgieron esos casos

Ecuaciones del modelo:

$$\text{Incidencia}(t) = \text{Tasa de incidencia} \cdot \text{poblacion susceptible}(t) \quad (3.5)$$

$$\frac{d(\text{poblacion susceptible}(t))}{dt} = - \text{Incidencia}(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{d(\text{poblacion enferma}(t))}{dt} = \text{Incidencia}(t) \quad (3.7)$$

$$\text{Prevalencia}(t) = \frac{\text{poblacion enferma}(t)}{\text{poblacion susceptible}(t) + \text{poblacion enferma}(t)} \quad (3.8)$$

Justificación a las ecuaciones: Respecto al modelo anterior, se utilizan las mismas dos ecuaciones diferenciales y la ecuación para calcular la prevalencia. Mientras que la ecuación (3.1) se sustituye por la ecuación (3.5) para hacer que la incidencia deje de ser constante y en todo momento sea proporcional a la población susceptible. La proporcionalidad entre estas variables viene determinada por la tasa de incidencia, pues es así como se define esta tasa.

Modelo en Vensim: La figura 3.5 muestra el aspecto que presenta el modelo “tasaincidencia_constante.mdl” en el entorno Vensim.

Modelo con tasa de incidencia constante

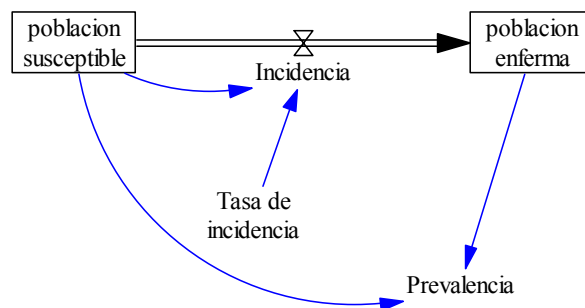


Figura 3.5. Modelo “tasaincidencia_constante”.

Ejemplo: Con $\text{poblacion susceptible}(0) = 1000$ personas, $\text{población enferma}(0) = 0$ y un valor constante de la tasa de incidencia = 0.1/día. Se obtienen los resultados recogidos en las Figuras 3.6a y 3.6b.

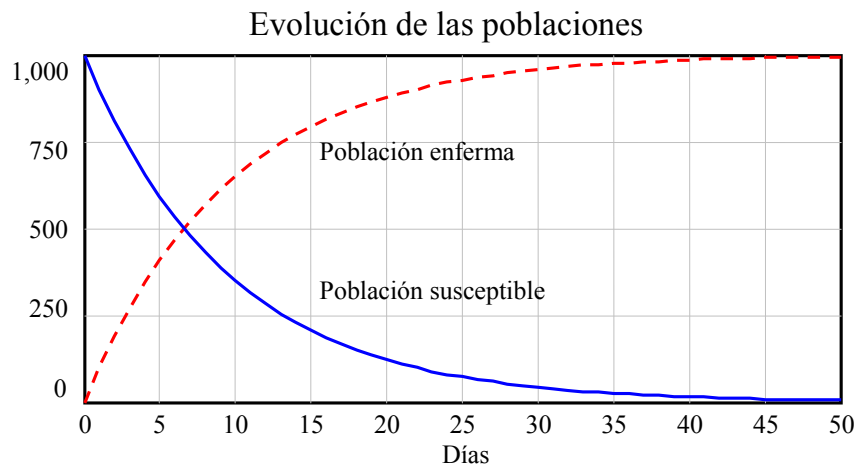


Figura 3.6a. Crecimiento y decrecimiento exponencial asintótico de las respectivas poblaciones cuando la tasa de incidencia es constante.

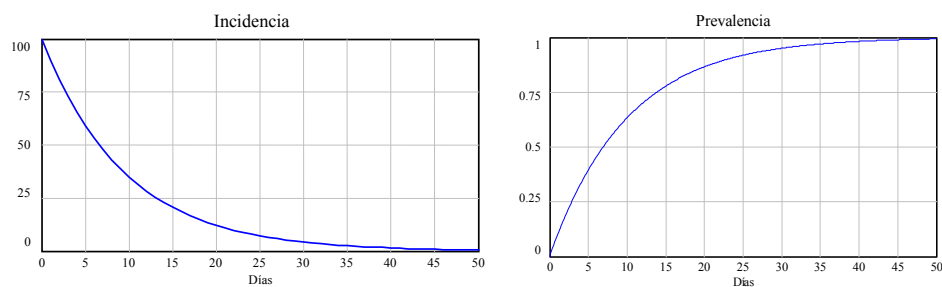


Figura 3.6b. Evolución de la incidencia y de la prevalencia.

Discusión de resultados: Toda población susceptible acaba estando enferma a los 50 días. La población susceptible presenta un decrecimiento asintótico, con una constante de tiempo inversamente proporcional a la tasa de incidencia, hasta que se agota. La población enferma presenta el crecimiento asintótico, complementario al de la población susceptible. La incidencia presenta un decrecimiento asintótico, alcanzando el valor nulo cuando se agota la población susceptible. La prevalencia presenta un crecimiento asintótico, al contrario que la incidencia, hasta alcanzar la unidad en el día 50. La siguiente función matemática describe el decrecimiento que ha sufrido la población susceptible:

$$\text{poblacion susceptible}(t) = \text{poblacion}(0) + (0 - \text{poblacion}(0)) e^{-\text{Tasa de incidencia } t}$$

La misma que hubiera resultado de integrar la ecuación diferencial

$$\frac{d \text{ poblacion susceptible}(t)}{dt} = \text{Tasa de incidencia} (0 - \text{ poblacion susceptible}(t))$$

Diagrama de influencias: En la figura 3.7 se muestra el diagrama de influencias correspondiente a este modelo dinámico. El diagrama recoge, como en el diagrama de influencias del modelo anterior, que la incidencia afecta negativamente a la población susceptible y positivamente a la población enferma. Pero recoge una nueva relación de influencia positiva entre la población susceptible y la incidencia, que provoca la presencia de un bucle de realimentación negativo. Este bucle es el responsable del efecto regulador que se presenta en este modelo dinámico, la población susceptible estará disminuyendo con una tasa proporcional a ella misma. Al principio la disminución es muy grande, pero conforme avanza el tiempo esta disminución se va haciendo pequeña y se llega a anular cuando no queda población susceptible.

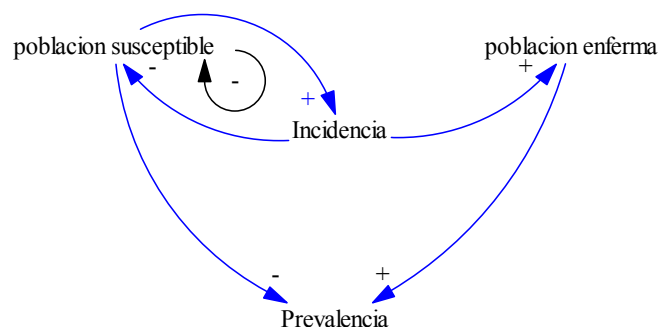


Figura 3.7. Diagrama de influencias con incidencia constante.

Simil hidráulico: La figura 3.8 muestra un simil hidráulico de esta situación; hay dos depósitos, el primero contiene a la población susceptible y el segundo a la población enferma, y mediante un grifo (de apertura fija) se deja pasar una cantidad variable (incidencia) de personas de una población a otra. La cantidad que pasa a través del grifo por unidad de tiempo es directamente proporcional a la cantidad de líquido (personas en este caso) que queda en el primer depósito. La proporcional, que está representada por el tamaño del orificio, es la tasa de incidencia y se puede variar abriendo (aumenta la tasa) o cerrando (disminuye la tasa) el grifo. Las situaciones iniciales y finales son las mismas que

en el modelo anterior, pero el tiempo que se tarda de pasar de una a otra es diferente. También se sigue verificando que en las situaciones intermedias, el segundo depósito habrá subido lo que haya bajado el primero.

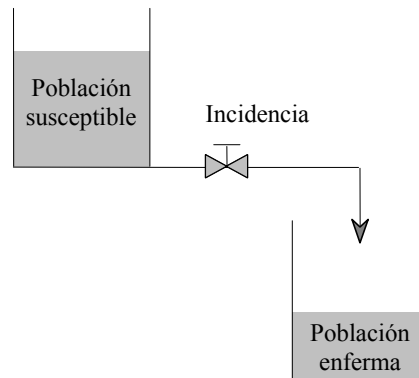


Figura 3.8. Simil hidráulico cuando la tasa de incidencia es constante.

Propuestas de ejercicios:

- 1ª) Simular y comparar otras situaciones para valores de la tasa de incidencia menores que la unidad.
- 2ª) Simular y comparar otras situaciones con valores de la población enferma inicial distinta de cero.

3.3 Tercer modelo: “tasacontagio_constante.mdl”

Objetivo: Repaso de los términos “población susceptible”, “incidencia” y “prevalencia”, bajo la hipótesis (bastante más realista) de que la tasa de contagio es constante.

Variables del modelo (tipo y significado):

- poblacion susceptible *Variable de estado.* Número de personas susceptibles de contraer la enfermedad
- poblacion enferma *Variable de estado.* Número de personas enfermas o con cierto trastorno producido por la enfermedad
- Incidencia *Variable de flujo.* Número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo

Prevalencia	<i>Variable auxiliar.</i> % de la población total que está enferma o presenta cierto trastorno causado por la enfermedad
Tasa de incidencia	<i>Variable auxiliar.</i> Cociente entre el número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo, y el número de personas que componen la población de la que surgieron esos casos
Tasa de contagio	<i>Parámetro.</i> También llamado coeficiente de transmisión de la enfermedad. Depende de dos factores: la tasa de contacto entre personas susceptibles e infecciosas y la probabilidad de transmisión de la enfermedad a partir de un contacto
Población inicial	<i>Constante</i> para poder asignar un valor inicial a la población total
Población enferma inicialmente	<i>Constante</i> para poder repartir la población total inicial en dos grupos: la población susceptible y la población enferma inicialmente

Ecuaciones del modelo:

$$\text{poblacion enferma}(0) = \text{poblacion enferma inicial} \quad (3.9)$$

$$\text{poblacion susceptible}(0) = \text{poblacion inicial} - \text{poblacion enferma inicial} \quad (3.10)$$

$$\text{Prevalencia}(t) = \frac{\text{poblacion enferma}(t)}{\text{poblacion susceptible}(t) + \text{poblacion enferma}(t)} \quad (3.11)$$

$$\text{Tasa de incidencia}(t) = \text{Tasa de contagio} \cdot \text{Prevalencia}(t) \quad (3.12)$$

$$\text{Incidencia}(t) = \text{Tasa de incidencia}(t) \cdot \text{poblacion susceptible}(t) \quad (3.13)$$

$$\frac{d(\text{poblacion susceptible}(t))}{dt} = - \text{Incidencia}(t) \quad (3.14)$$

$$\frac{d(\text{poblacion enferma}(t))}{dt} = \text{Incidencia}(t) \quad (3.15)$$

Justificación a las ecuaciones: Respecto al modelo anterior, se utilizan las mismas dos ecuaciones diferenciales y la ecuación para calcular la prevalencia. Se han incluido las dos primeras ecuaciones primeras con el único objetivo de repartir la población inicial. Se ha incluido la ecuación (3.12) para hacer que la tasa de incidencia deje de ser constante y en todo momento sea proporcional a la prevalencia. La proporcionalidad entre estas variables viene determinada por la tasa de contagio, pues es así como se define esta tasa. Por último, se ha sustituido la ecuación (3.5) por la ecuación (3.13) puesto que la tasa de incidencia ha dejado de ser constante.

Modelo en Vensim: La figura 3.9 muestra el aspecto que presenta el modelo “`tasacontagio_constante.mdl`” en el entorno Vensim. A los anteriores grupos gráficos se ha añadido en este modelo uno que representa la tasa de incidencia.

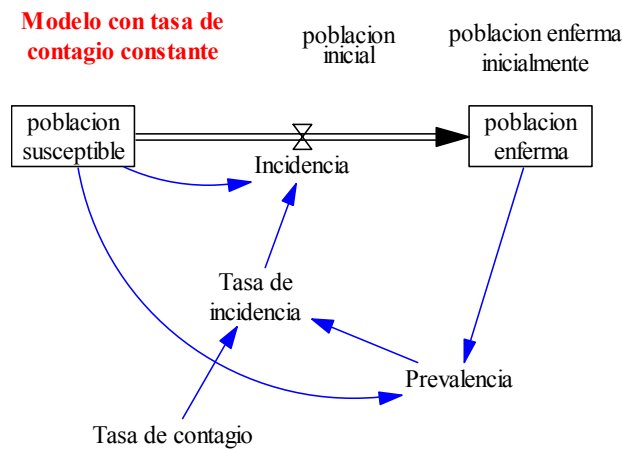


Figura 3.9. Modelo “tasacontagio_constante”.

Ejemplo: Con $\text{poblacion susceptible}(0) = 1000$ personas, $\text{población enferma}(0) = 0$ y un valor constante de la tasa de contagio = 0.5/día. Se obtienen los resultados recogidos en las Figuras 3.10a y 3.10b.

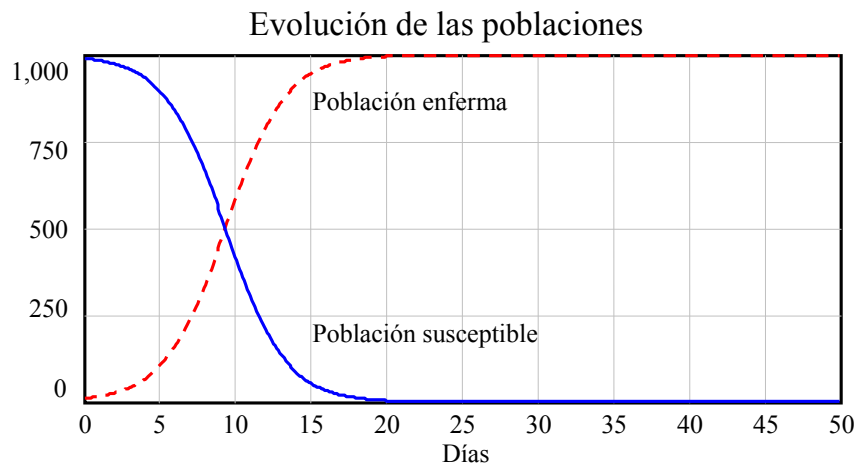


Figura 3.10a. Crecimiento y decrecimiento sigmoide de las respectivas poblaciones cuando la tasa de contagio es constante.

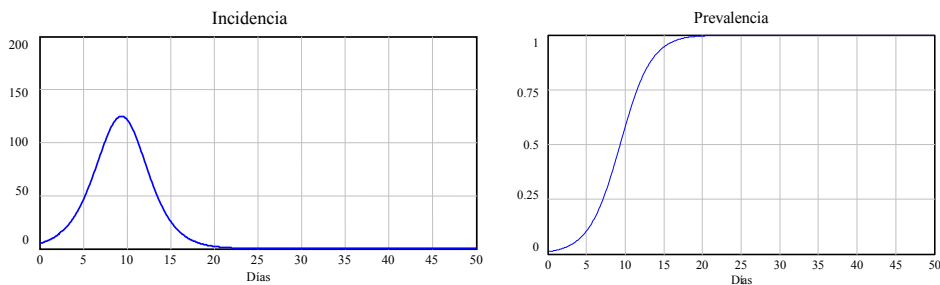


Figura 3.10b. Evolución de la incidencia y de la prevalencia.

Discusión de resultados: Toda población susceptible acaba estando enferma a los 20 días. La población susceptible presenta un decrecimiento sigmoide, de una duración inversamente proporcional a la tasa de contagio, hasta que se agota. La población enferma presenta el crecimiento sigmoide, complementario al de la población susceptible. La incidencia presenta una forma de campana, con un valor máximo entorno al día 9. La prevalencia presenta un crecimiento sigmoide, desde un valor inicial hasta el valor unidad, que alcanza en el día 20. La tasa de incidencia, no representada en las gráficas, evoluciona de forma similar a la prevalencia, pues está directamente relacionada con ésta a través de la tasa de contagio que es constante.

La función matemática que describe el crecimiento sigmoide será objeto de un estudio detallado en el próximo apartado. Por la importancia que este tipo de crecimiento tiene en

la propagación de enfermedades. En ese apartado también se analizará el diagrama de influencias de este modelo.

Símil hidráulico: La figura 3.11 muestra un símil hidráulico de esta situación; hay dos depósitos, el primero contiene a la población susceptible y el segundo a la población enferma, y alguien, mediante una válvula (de apertura variable), deja pasar una cantidad variable (incidencia) de personas de una población a otra con el objetivo de conseguir que el segundo depósito alcance una cantidad de líquido determinada (todas las personas en este caso). La cantidad que pasa a través de la válvula por unidad de tiempo es como antes, directamente proporcional a la cantidad de líquido que queda en el primer depósito, pero el tamaño del orificio que deja la válvula, en lugar de estar fijo, se está aumentando hasta conseguir que el segundo depósito alcance la cantidad de líquido deseada. Las situaciones iniciales y finales son las mismas que en el modelo anterior, pero el tiempo que se tarda de pasar de una a otra es diferente. También se sigue verificando que en las situaciones intermedias, el segundo depósito habrá subido lo que haya bajado el primero.

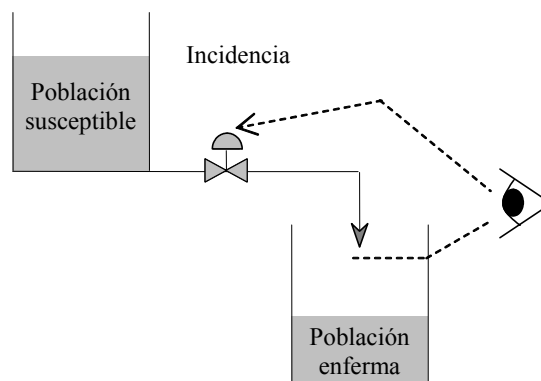


Figura 3.11. Símil hidráulico cuando la tasa de contagio es constante.

Propuestas de ejercicios:

- 1ª) Simular y comparar otras situaciones para valores de la tasa de contagio menores que 1.
- 2ª) Simular y comparar otras situaciones con distintos valores de la población inicial y de la población enferma inicialmente.

4. EL CRECIMIENTO SIGMOIDAL

El crecimiento sigmoideal o logístico de una variable tiene una forma característica, representada en la figura 4.1. Ejemplo de sistemas que exhiben este comportamiento son la difusión de un rumor, la venta de nuevos productos, la propagación de enfermedades infecciosas y las poblaciones con recursos limitados. La variable $x(t)$ parte de un valor inicial $x_0=x(0)$, crece rápidamente (de forma exponencial) hasta que se produce un punto de inflexión en el instante t_m , y a partir de él evoluciona asintóticamente hacia un valor final $x_f=x(\infty)$.

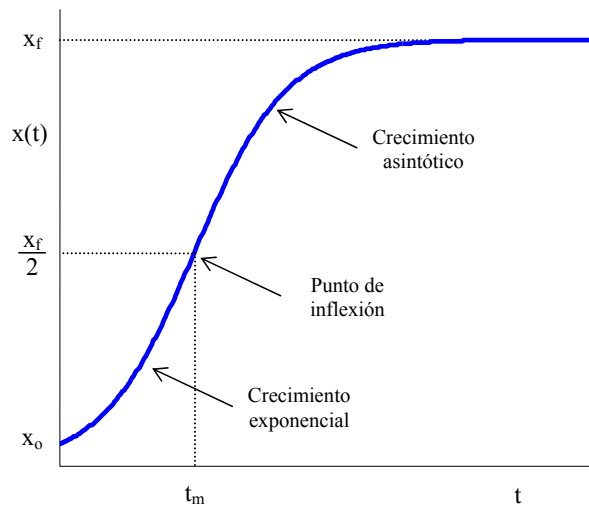


Figura 4.1. Forma característica del crecimiento sigmoideal.

Este crecimiento se puede modelar con la siguiente función del tiempo, que pasa por el valor $x_f/2$ en el punto de inflexión:

$$x(t) = \frac{x_f}{1 + e^{-k(t-t_m)}} \quad (4.1)$$

Justificación:

- Efectivamente, esta función para $t=\infty$ toma el valor

$$x(\infty) = \frac{x_f}{1 + e^{-k(\infty-t_m)}} = \frac{x_f}{1 + e^{-\infty}} = \frac{x_f}{1 + 0} = x_f$$

- Para $t=t_m$ toma el valor

$$x(t_m) = \frac{x_f}{1 + e^{-k(t_m - t_m)}} = \frac{x_f}{1 + e^0} = \frac{x_f}{1 + 1} = \frac{x_f}{2}$$

Todavía, para comprobar que ese es el punto de inflexión, nos quedaría comprobar que en $t=t_m$ la derivada segunda respecto al tiempo de esta función es nula.

- Y para $t=0$ toma el valor x_0

$$x(0) = \frac{x_f}{1 + e^{-k(0 - t_m)}} = \frac{x_f}{1 + e^{k t_m}} = x_0$$

El crecimiento sigmoideal, expresado por la función del tiempo (1), queda perfectamente definido si se fija el valor inicial x_0 , el valor final x_f y el instante t_m en el que se tiene que producir el punto de inflexión. Pues el otro parámetro “k” característico de este crecimiento sigmoideal, conocido como “tasa de crecimiento”, está relacionado con esos tres datos a partir de la expresión:

$$k = \frac{1}{t_m} \ln \left(\frac{x_f - x_0}{x_0} \right) \quad (4.2)$$

El archivo “**ft_sigmoideal.mdl**” permite jugar con estos parámetros y reproducir crecimientos sigmoideales a partir de la función temporal (1). El alumno podrá así observar cómo influyen en la crecimiento sigmoideal cualquiera de los tres parámetros (x_0 , x_f y t_m). La figura 4.2 muestra el aspecto que presenta el modelo “ft_sigmoideal” cuando se selecciona el modo “SyntheSim” en el entorno Vensim.

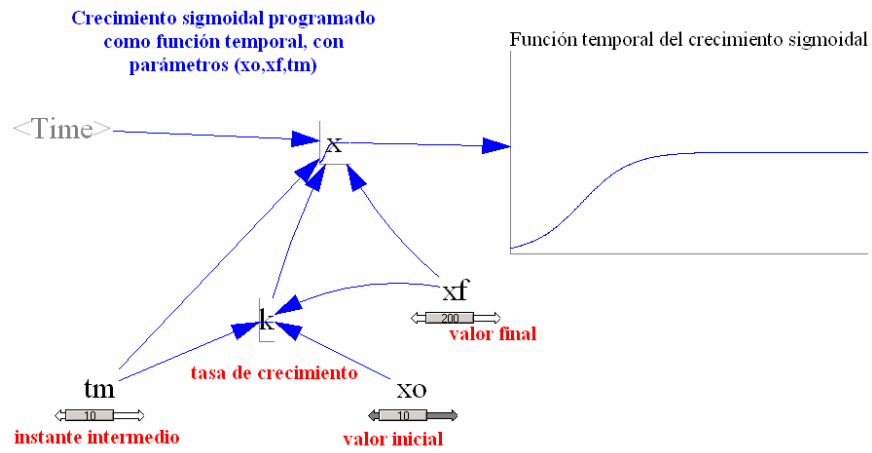


Figura 4.2. Modelo “ft_sigmoial” en el modo SynTheSim.

Las figuras 4.3a, 4.3b y 4.3c recogen las influencias de cada uno de los parámetros (x_0 , x_f y t_m) de forma aislada en el crecimiento sigmoial.

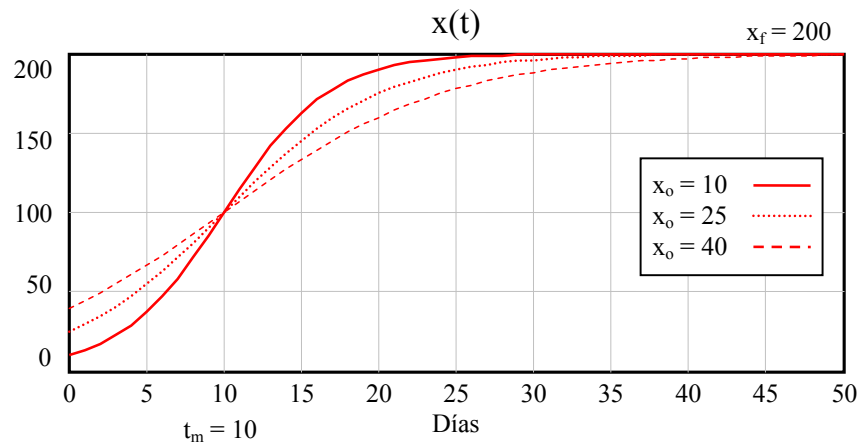


Figura 4.3a. Influencia del valor inicial (parámetro x_0) en el crecimiento sigmoial.

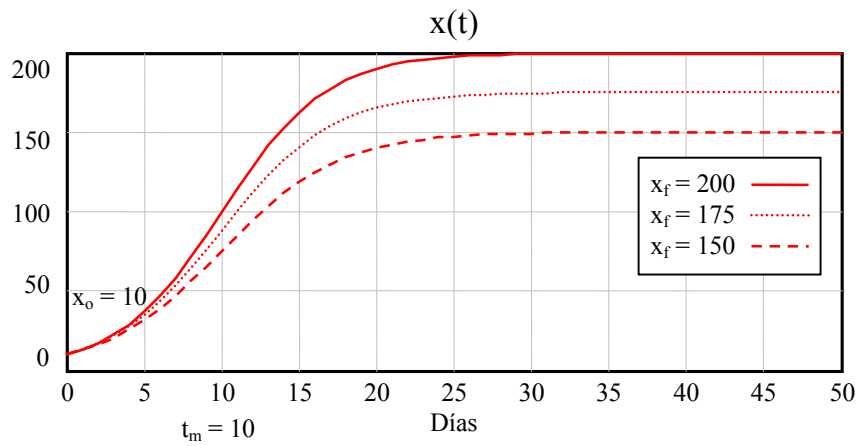


Figura 4.3b. Influencia del valor final (parámetro x_f) en el crecimiento sigmoideal.

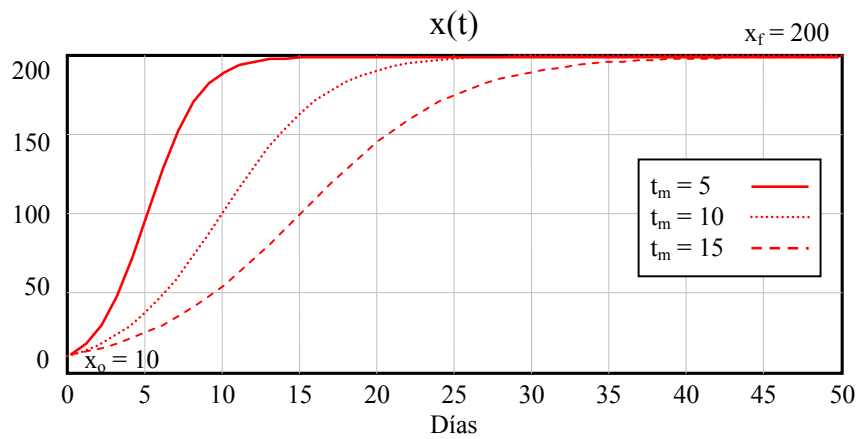


Figura 4.3c. Influencia del instante intermedio (parámetro t_m) en el crecimiento sigmoideal.

Otra forma posible de parametrizar el crecimiento sigmoideal consiste en fijar el valor inicial x_0 , el valor final x_f y el valor de k . En ese caso, el instante t_m en el que se producirá el punto de inflexión queda determinado por la expresión:

$$t_m = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{x_f - x_0}{x_0} \right) \quad (4.3)$$

Se deja como ejercicio que el alumno modifique el archivo “ft_sigmoidal.mdl” para reproducir crecimientos sigmoidales a partir de la función temporal (4.1), utilizando los parámetros parámetros (x_0 , x_f y k).

4.1. NATURALEZA DINÁMICA DEL CRECIMIENTO SIGMOIDAL.

Según Aracil y Gordillo, 1997, el crecimiento sigmoidal es un comportamiento bastante común en los procesos dinámicos, pues es muy normal que el proceso de crecimiento asociado a un bucle de realimentación positiva se encuentre, más pronto o más tarde, con unos límites. Ello es debido a que la espiral de crecimiento produce, aunque sea de forma no deseada, efectos secundarios que eventualmente conducen al agotamiento del proceso de crecimiento.

Según estos mismo autores, el crecimiento sigmoidal puede describirse por una ecuación diferencial de primer orden donde la relación entre el flujo neto (derivada de la variable $x(t)$) y el estado $x(t)$ sea no lineal, con un tramo creciente y otro decreciente.

Veamos que esto se cumple en la función propuesta anteriormente para representar el crecimiento sigmoidal. Derivando la función (4.1) se llega a la expresión:

$$\frac{d x(t)}{d t} = \frac{k x_f e^{-k(t-t_m)}}{\left(1 + e^{-k(t-t_m)}\right)^2} \quad (4.4)$$

Y como de (4.1) se puede despejar

$$e^{-k(t-t_m)} = \frac{x_f - x(t)}{x(t)}$$

Sustituyendo en (4.4) se llega a que

$$\frac{d x(t)}{d t} = \frac{x^2(t)}{x_f} k e^{-k(t-t_m)} = \frac{x^2(t)}{x_f} k \frac{x_f - x(t)}{x(t)} = k \frac{1}{x_f} x(t) (x_f - x(t)) = f(t) \quad (4.5)$$

siendo

$$f(t) = k \frac{1}{x_f} x(t) (x_f - x(t)) \quad (4.6)$$

Es decir, se llega a comprobar que el flujo $f(t)$ (derivada de la variable $x(t)$) es una función cuadrática de la propia variable $x(t)$, que tiene forma parabólica invertida con valor nulo en $x=x_f$ y con valor máximo en $x_f/2$ de valor $k x_f/4$. Véase la figura 4.4. La primera parte, hasta $x_f/2$, de la función (4.6) es creciente con $x(t)$ y la segunda parte, a partir de $x_f/2$, es decreciente.

En la figura 4.5 está representada la evolución temporal del flujo, que lógicamente es la función derivada de la figura 4.1, con valor máximo en el mismo instante t_m que la variable de estado tiene su punto de inflexión.

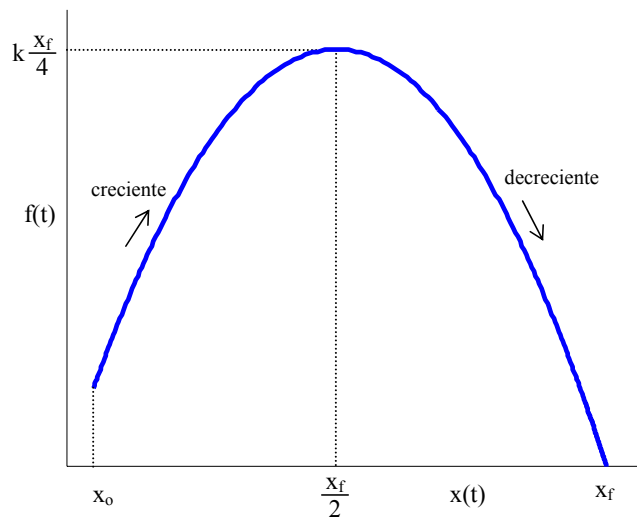


Figura 4.4. Relación entre el flujo $f(t)$ y el estado $x(t)$ en el crecimiento sigmoideal.

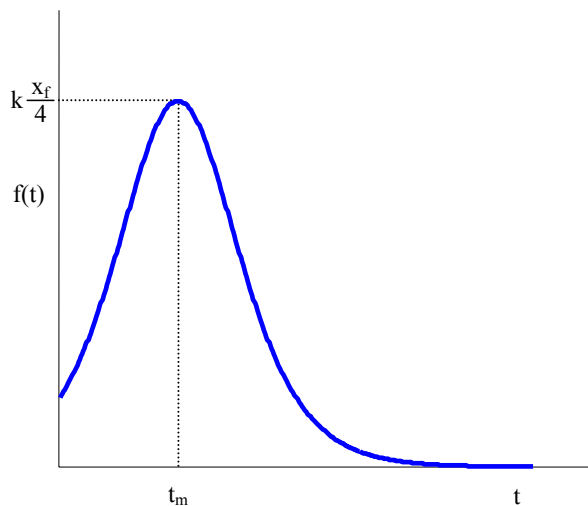


Figura 4.5. Evolución temporal del flujo en el crecimiento sigmoideal.

El archivo “**md_sigmoidal.mdl**” permite reproducir crecimientos sigmoidales a partir del modelo dinámico descrito por la ecuación diferencial (4.5) y la ecuación algebraica (4.2). Además de las características descritas en el apartado anterior, el alumno podrá observar la forma del flujo y comprobar como su máximo valor instantáneo se presenta en el punto de inflexión del crecimiento sigmoidal. La figura 4.6 muestra el aspecto que presenta el modelo “**md_sigmoidal**” cuando se selecciona el modo “**SyntheSim**” en el entorno Vensim.

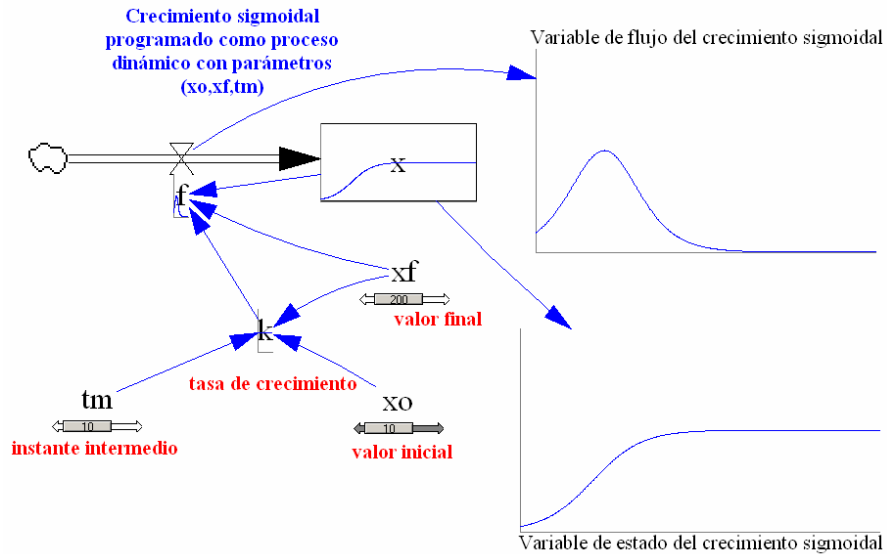


Figura 4.6. Modelo “**md_sigmoidal**” en el modo SynTheSim.

Las figuras 4.7a, 4.7b y 4.7c recogen las influencias de cada uno de los parámetros (x_0 , x_f y t_m) de forma aislada en el flujo del crecimiento sigmoidal.

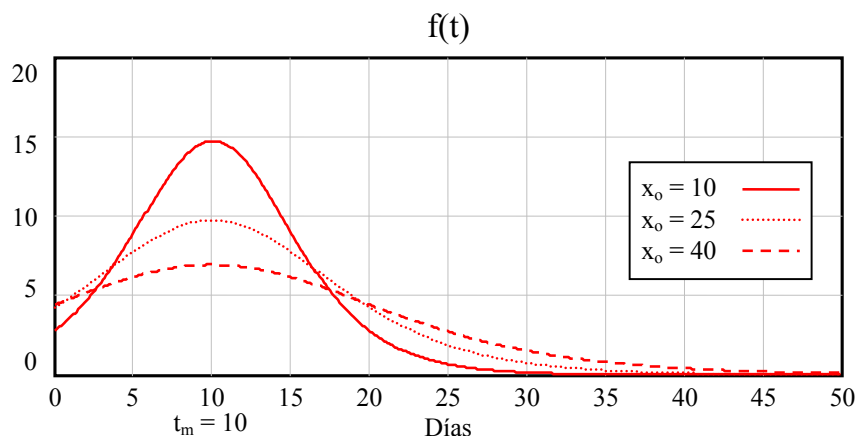


Figura 4.7a. Influencia del valor inicial (parámetro x_0) en el flujo del crecimiento sigmoidal, manteniendo $x_f=200$ y $t_m=10$.

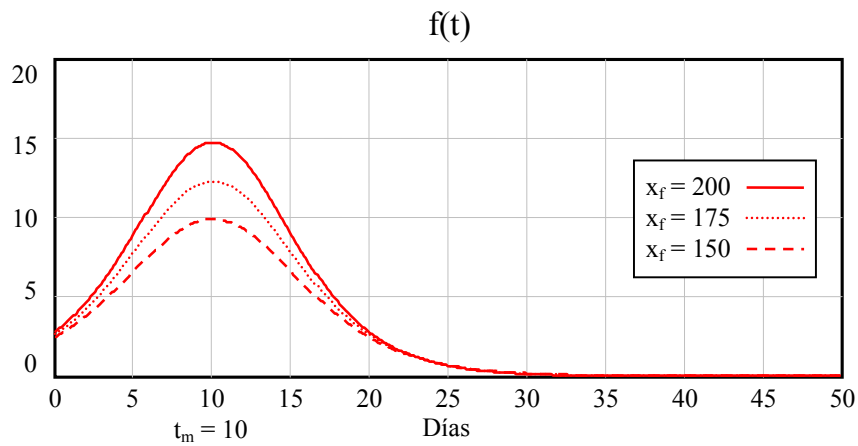


Figura 4.7b. Influencia del valor final (parámetro x_f) en el flujo del crecimiento sigmoideal, manteniendo $x_o=10$ y $t_m=10$.

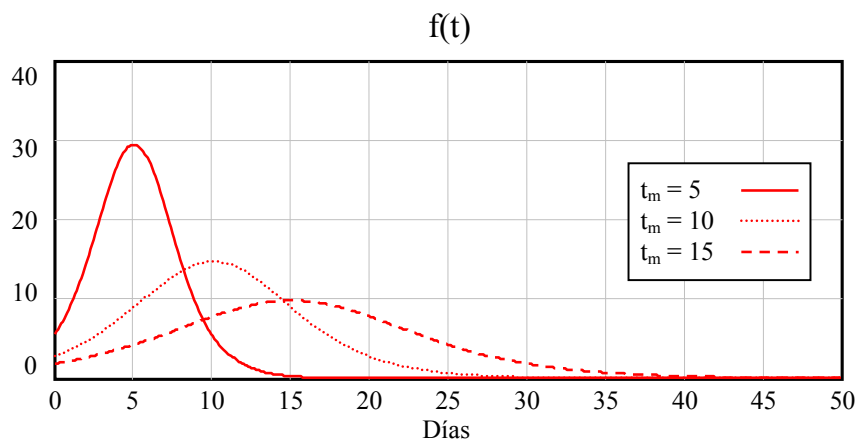


Figura 4.7c. Influencia del instante intermedio (parámetro t_m) en el flujo del crecimiento sigmoideal, manteniendo $x_o=10$ y $x_f=200$.

El crecimiento sigmoideal se puede programar aún de una forma más simple, utilizando únicamente la ecuación diferencial (4.5), por tanto como un modelo dinámico con parámetros (x_o , x_f e k). El archivo “**md2_sigmoideal.mdl**” responde a ese esquema, como puede apreciarse en la figura 4.8.

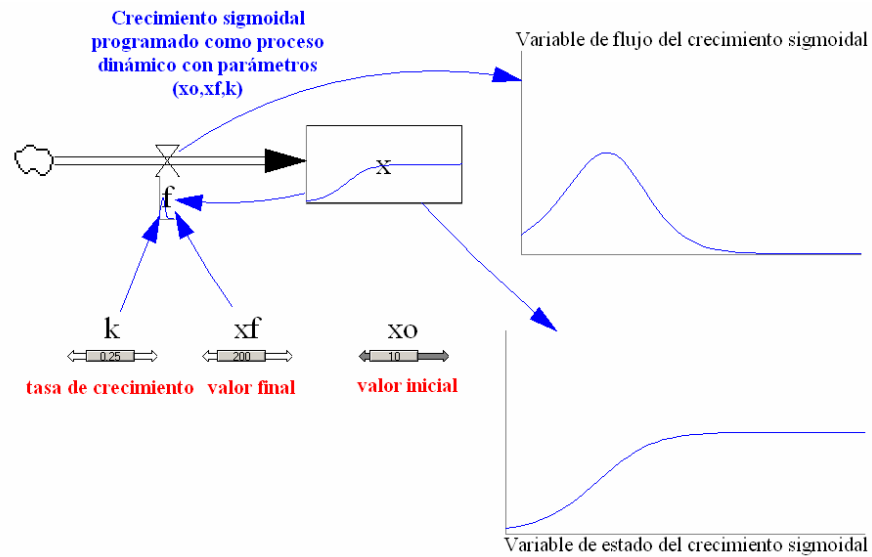


Figura 4.8. Modelo “md2_sigmoial” en el modo SynTheSim.

El modelo dinámico del crecimiento sigmoial es un buen ejemplo para poder ver el error que se comete al utilizar la aproximación de Euler si no se elige un intervalo de discretización (variable <TIME STEP> en Vensim) adecuado. Basta comparar las gráficas generadas por este modelo con las generadas por la función temporal. El archivo “ft_y_md_sigmoial.mdl”, que se muestra en la figura 4.9, se ha programado con este fin.

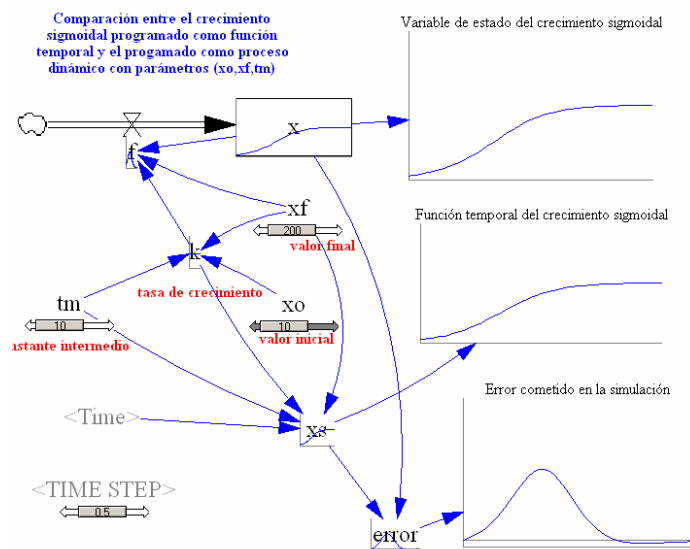


Figura 4.9. Modelo “ft_y_md_sigmoial” en el modo SynTheSim.

La figura 4.10 recoge la influencia del intervalo de discretización en la simulación del crecimiento sigmoidal a partir del modelo dinámico con parámetros: $x_0=10$, $x_f=200$ y $t_m=10$.

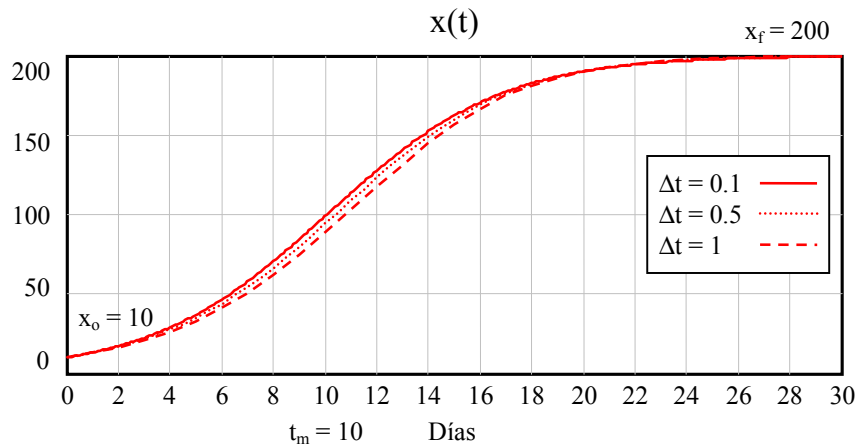


Figura 4.10. Influencia del intervalo de discretización en la simulación del crecimiento sigmoidal.

4.2 Diagrama de influencias y diagrama de Forrester del crecimiento sigmoidal

No existe un diagrama de influencias único ni un diagrama de Forrester único para el crecimiento sigmoidal, todo depende del nivel de detalle que se quiera dar al modelo dinámico. Por ejemplo, la figura 4.11 muestra el diagrama de influencias del modelo dinámico descrito por la ecuación diferencial (4.5), donde se ha creído conveniente incluir una variable adicional, la diferencia $x_f - x(t)$, para que se vea cómo coexisten dos bucles de realimentación en el modelo.

La influencia “flujo \rightarrow estado” se obtiene de la expresión

$$\frac{d x(t)}{dt} = f(t) \quad ; \quad \frac{d \text{ estado}}{dt} = \text{flujo}$$

Las influencias “estado \rightarrow diferencia” y “valor final \rightarrow diferencia” se obtienen de la expresión

$$d(t) = x_f - x(t) \quad ; \quad \text{diferencia} = \text{valor final} - \text{estado}$$

Las influencias “tasa de crecimiento \rightarrow flujo”, “valor final \rightarrow flujo”, “estado \rightarrow flujo” y “diferencia \rightarrow flujo” se obtienen de la expresión

$$f(t) = k \frac{1}{x_f} x(t) d(t) \quad ; \quad \text{flujo} = \text{tasa de crecimiento} \frac{1}{\text{valor final}} \text{ estado diferencia}$$

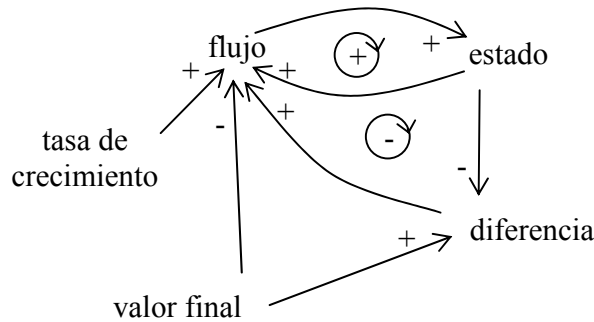


Figura 4.11. Un posible diagrama de influencias del crecimiento sigmoideal.

Por tanto el crecimiento sigmoideal es la manifestación del comportamiento dinámico de un sistema en el que interaccionan dos bucles de realimentación elemental. Uno de realimentación positiva y otro de realimentación negativa. El bucle de realimentación positiva formado por sendas relaciones de influencias positivas entre las variables “flujo” y “estado” es el responsable del crecimiento exponencial en la fase inicial del crecimiento sigmoideal, véase figura 4.1. El bucle de realimentación negativa formado por las relaciones de influencias entre las variables “flujo”, “estado” y “diferencia” es el responsable del crecimiento asintótico en la fase final del crecimiento sigmoideal, véase figura 4.1.

En la figura 4.12 se ha representado el diagrama de Forrester que se obtiene a partir del diagrama de influencias anterior y/o de las ecuaciones del modelo, haciendo explícita la diferencia entre el valor final y el valor instantáneo del estado. Mientras que en la figura 4.13 se muestra un esquema más simple, el que resulta de programar en Vensim la ecuación diferencial (3.5). Este esquema no cumple estrictamente con la simbología propuesta originalmente por Forrester, porque no explicita que el flujo es una función no lineal de las otras variables, pero se puede aceptar como tal diagrama de Forrester.

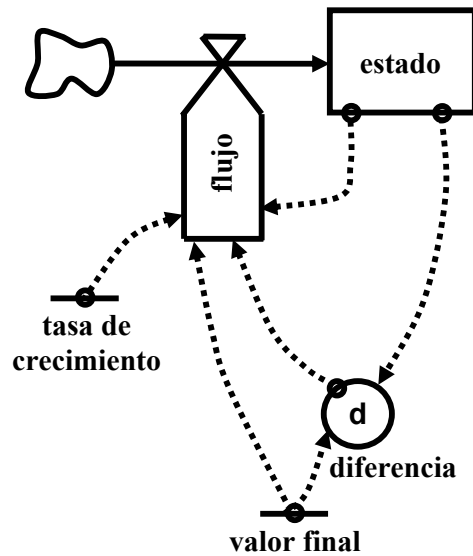


Figura 4.12a. Diagrama de Forrester del crecimiento sigmoideal, que hace explícita la diferencia entre el estado y el valor final.

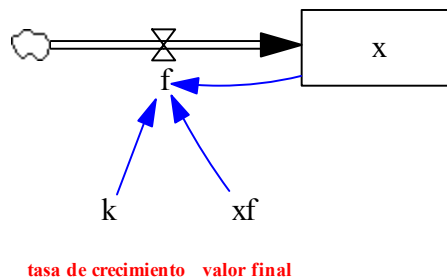


Figura 4.13. Diagrama de Forrester del crecimiento sigmoideal en Vensim.

4.3. EJEMPLOS DE CRECIMIENTO SIGMOIDAL

Existen muchos ejemplos de crecimiento sigmoideal en la bibliografía sistémica (Aracil y Gordillo, 1997), (M. Glick y T. Duhon, 1994), (Martín, 2003), pero el más citado es el de “**La difusión de una epidemia**” con las siguientes hipótesis (bastante realistas en las epidemias de catarros y gripes):

- La población es constante, es decir, el saldo de nacimientos, defunciones y fenómenos migratorios es nulo.
- La enfermedad es lo suficientemente suave como para que los enfermos no dejen de hacer una vida normal, y éstos no se curan completamente durante el periodo de la epidemia; con ello se evita la reinfección.

- La población enferma y la susceptible de contraer la enfermedad se encuentran homogéneamente mezcladas.

Este modelo de “**La difusión de una epidemia**” coincide exactamente con el último modelo que se analizó al repasar los conceptos de incidencia y de prevalencia. Recordemos que la población enferma del modelo “**tasacontagio_constante.mdl**” presentaba un crecimiento sigmoideal. La ecuación diferencial responsable de este crecimiento era la siguiente:

$$\frac{d(\text{poblacion enferma}(t))}{dt} = \text{Incidencia}(t)$$

Luego la variable “población enferma(t)” hace el papel de la variable de estado $x(t)$ y la variable “Incidencia(t)” hace el papel de la variable de flujo $f(t)$.

Pero como la incidencia venía a su vez determinada por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\text{Incidencia}(t) = \text{Tasa de incidencia}(t) \cdot \text{poblacion susceptible}(t)$$

$$\text{Tasa de incidencia}(t) = \text{Tasa de contagio} \cdot \text{Prevalencia}(t)$$

$$\text{Prevalencia}(t) = \frac{\text{poblacion enferma}(t)}{\text{poblacion susceptible}(t) + \text{poblacion enferma}(t)}$$

Por sustituciones sucesivas se llega a que:

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{poblacion enferma}(t))}{dt} &= \\ &= \text{Tasa de contagio} \cdot \frac{\text{poblacion enferma}(t)}{\text{poblacion susceptible}(t) + \text{poblacion enferma}(t)} \cdot \text{poblacion susceptible}(t) \end{aligned}$$

Se demuestra así que la variación de la población enferma responde a la ecuación diferencial (4.5), característica del crecimiento sigmoideal.

Comparando ambas expresiones, está claro que el parámetro “Tasa de contagio” juega un papel similar a la tasa de crecimiento, parámetro “ k ”, del crecimiento sigmoideal y que el valor x_f está determinado desde el instante inicial por la suma de las poblaciones

$$x_f = \text{poblacion susceptible}(t) + \text{poblacion enferma}(t) = \text{poblacion inicial}$$

Verificándose además, en el resto del tiempo que la población susceptible es toda aquella parte de la población total que aún no ha caído enferma.

$$\text{poblacion susceptible}(t) = x_f - \text{poblacion enferma}(t)$$

Además, como en este caso los datos conocidos eran las poblaciones iniciales y la tasa de contagio, sustituyendo en la expresión (4.3) es posible determinar el instante en el que se va a producir el máximo de incidencia. Concretamente:

$$t_m = \frac{1}{\text{Tasa de contagio}} \ln \left(\frac{\text{poblacion inicial} - \text{poblacion enferma}(0)}{\text{poblacion enferma}(0)} \right)$$

que en el caso particular de Tasa de contagio = 0.5, poblacion inicial(0) = 1000 y población enferma(0) = 10, nos da un valor de $t_m \cong 9$ días. Este valor se puede comprobar en el modelo “tasacontagio_constante.mdl” si se elige un intervalo de discretización de 0.1 día.

Mientras que en el modelo “md_sigmoidal.mdl” había una sola variable de estado, el modelo “tasacontagio_constante.mdl” nos permite interpretar el crecimiento sigmoidal como un sistema dinámico con dos variables de estado. Basta recordar que en su modelo matemático había dos ecuaciones diferenciales y su programación en Vensim necesitaba de dos variables de estado: la población susceptible y la población enferma. Su diagrama de influencias, que se muestra en la figura 4.14, también realizado con Vensim, pone de manifiesto la presencia los dos bucles elementales de realimentación responsables de este tipo de crecimiento. El bucle de realimentación positiva formado por las relaciones de influencias entre las variables “población enferma”, “Prevalencia”, “Tasa de incidencia” e “Incidencia”. El bucle de realimentación negativa formado por las relaciones de influencias entre las variables “población susceptible” e “Incidencia”.

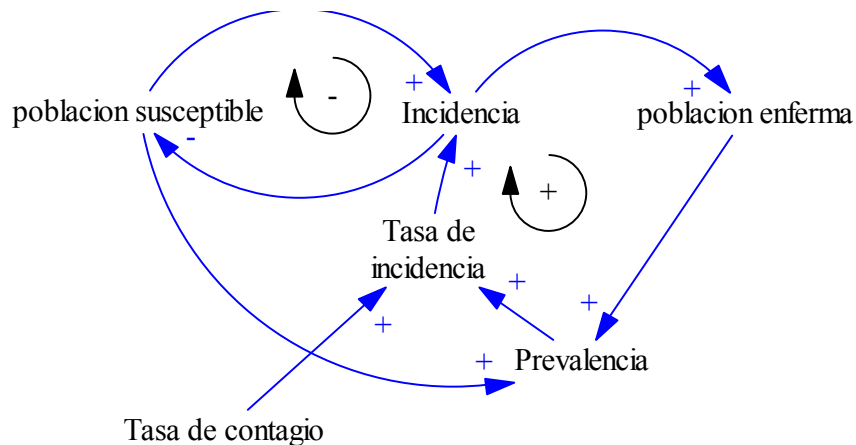


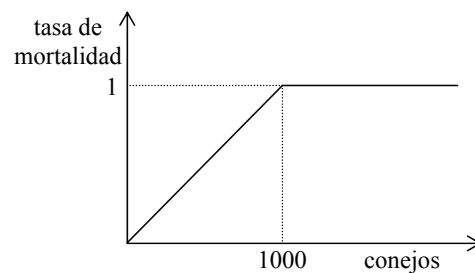
Figura 4.14. Diagrama de influencias típico de la difusión de una epidemia.

A continuación se enuncian varios modelos dinámicos que presentan crecimiento asintótico en alguna de sus variables para que el alumno practique con ellos.

4.3.1. Modelo “Población de conejos”

Proponer un modelo matemático que permita estudiar la evolución de una “Población de conejos” confinada en un espacio reducido, sabiendo que:

- El 10% de la población son hembras productivas.
- Cada hembra productiva tiene por término medio dos camadas anuales.
- En cada camada sobreviven cuatro conejos por término medio.
- La tasa de mortalidad de los conejos es una función no lineal del número total de conejos, tal como muestra la siguiente gráfica. La función nos dice que el crecimiento de la población de conejos provoca un aumento en la tasa de mortalidad, posiblemente por la escasez de alimentos en el espacio reducido en el que están confinados, hasta que alcanza su valor máximo (la unidad) para una población de 1000 conejos.



- a) Programar el modelo en Vensim y comprobar que a partir de una población inicial de 100 conejos, el número de conejos crece sigmoidealmente hasta un valor de 800, donde permanece invariablemente. Se recomienda redondear las variables de flujo al menor valor entero. Si el alumno ha encontrado dificultades para programar el modelo, puede utilizar el archivo “**poblacion_conejos.mdl**”.

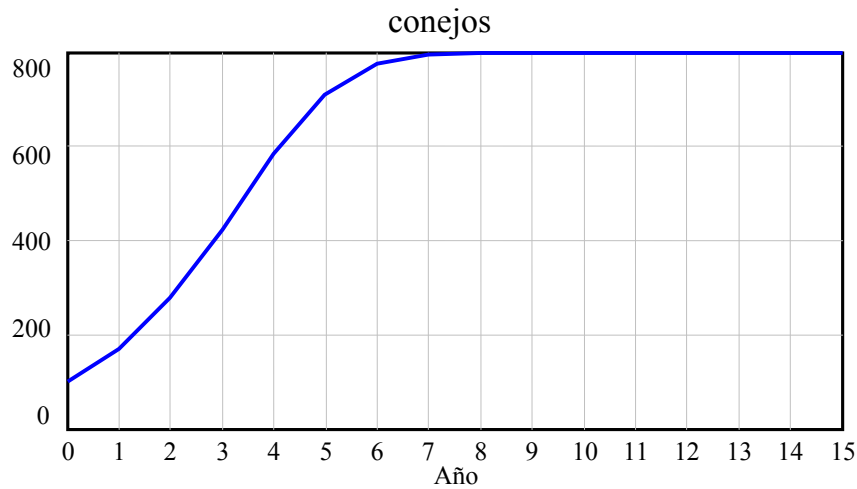


Figura 4.15. Crecimiento sigmoide de la población de conejos.

- b) ¿Cómo se explica este fenómeno? Para contestar esta pregunta es conveniente analizar el resto de variables del modelo.
- c) Utilice el modelo para comprobar qué hubiera ocurrido si las hembras solo hubieran podido procrear una vez al año o si el número de conejos por camada hubiera sido menor.

4.3.2. Modelo “Edificación de viviendas”

Con las siguientes cuatro ecuaciones y la tabla se pretende modelar el proceso de edificación de viviendas en un área urbana de superficie limitada.

$$(1) \text{ demolicion de viviendas (t)} = \frac{\text{viviendas (t)}}{\text{vida media de las viviendas}}$$

$$(2) \text{ factor de ocupacion (t)} = \frac{\text{viviendas (t) superficie media por vivienda}}{\text{superficie total}}$$

$$(3)$$

$$\text{construccion de viviendas (t)} = \text{tasa de construccion (factor ocupacion(t)) viviendas (t)}$$

$$(4) \frac{d \text{ viviendas}(t)}{dt} = \text{construccion de viviendas}(t) - \text{demolicion de viviendas}(t)$$

Factor ocupacion	Tasa de construccion
0	0
0.1	0.1
0.2	0.2
0.3	0.3
0.4	0.4
0.5	0.5
0.6	0.4
0.7	0.3
0.8	0.2
0.9	0.1
1	0

- a) Programar el modelo en Vensim y simular al menos 20 años para observar si el número de viviendas tiende a un valor en estado estacionario. Las condiciones de la simulación serán:
- Inicialmente hay 500 viviendas.
 - La vida media de las viviendas es de 50 años.
 - La superficie edificable está limitada a 1000000 m².
 - La superficie media por vivienda es de 200 m².
 - El intervalo de simulación Δt es de 1 año.
 - En las variables que no tengan sentido los decimales, se redondeará al menor entero.
- b) Utilizar el modelo para reproducir otras situaciones.

Si el alumno ha encontrado dificultades para programar el modelo, puede utilizar el archivo “**edificacion_viviendas.mdl**”.

4.3.3. Modelo “Propagación de enfermedades”

El modelo “**tasacontagio_constante.mdl**”, que se ha utilizado como el ejemplo más significativo del crecimiento sigmoideal admite diversas ampliaciones sin necesidad de

distinguir más grupos de población que las ya consideradas (población susceptible y población enferma). En primer lugar se puede ampliar suponiendo que existe curación entre la población enferma, que ésta se produce por término medio en un número de días, y que no existe inmunidad permanente, por tanto puede existir reinfección. También se puede ampliar suponiendo que existe una tasa de letalidad (tasa de mortalidad entre la población enferma), es decir, suponiendo que la población total deja de ser “constante”.

Con estas dos ampliaciones se llega al modelo dinámico “**Propagación de enfermedades**”, véase el archivo “**propagacion_enfermedades.mdl**”, representado en la figura 4.16, en el que se han incorporado las siguientes nuevas variables:

Curacion	Número diario de personas que se curan y pueden volver a enfermar
Duracion media de la enfermedad	
Muertes	Número diario de personas que mueren como consecuencia de la enfermedad
Tasa de letalidad	Tasa de mortalidad entre la población enferma

Propagación de enfermedades

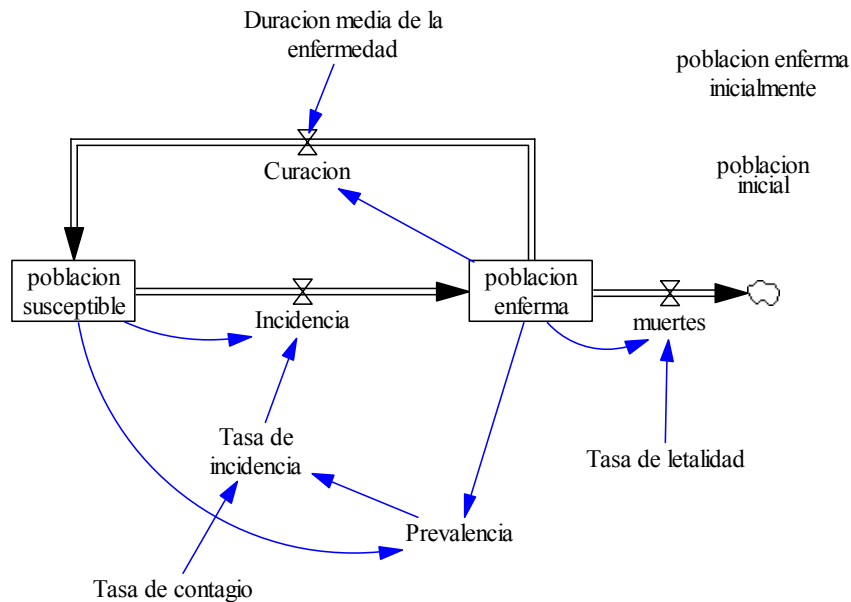


Figura 4.16. Modelo de propagación de enfermedades con dos grupos de población (población susceptible y población enferma).

Suponiendo que los parámetros del modelo tienen los valores (Tasa de contagio=0.5, Duración media de la enfermedad=5 y Tasa de letalidad=0) y que la población total inicial es de mil personas, de las que sólo 10 personas están enfermas. Se puede comprobar que las poblaciones evolucionan como se muestra en la figura 4.17a y que los flujos evolucionan como se muestra en la figura 4.17b.

Los resultados de las figuras 4.17a y 4.17b se pueden interpretar de la siguiente forma: en aproximadamente 35 días se ha alcanzado una situación endémica en la población. Que se manifiesta por un equilibrio entre la población enferma y la población susceptible, con predominio de la población enferma, porque se han igualado los flujos de Incidencia y de Curación y esta igualdad se mantiene indefinidamente. Hasta llegar a esta situación la población enferma ha experimentado un crecimiento sigmoide y la población susceptible ha experimentado el decrecimiento sigmoide complementario. En la figura 4.17c se muestra cómo la Prevalencia ha crecido sigmoideamente desde un valor pequeño inicial al valor final del 60%, donde permanece indefinidamente, por tanto siempre hay un 60% de la población que está enferma y un 40% que está susceptible a contraer la enfermedad, aunque ya la hubiera contraído con anterioridad.

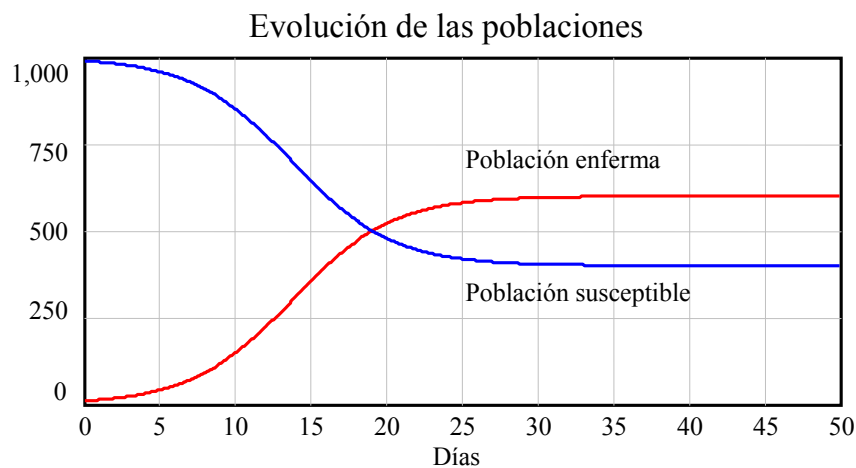


Figura 4.17a. Evolución de las poblaciones cuando la tasa de letalidad es nula.

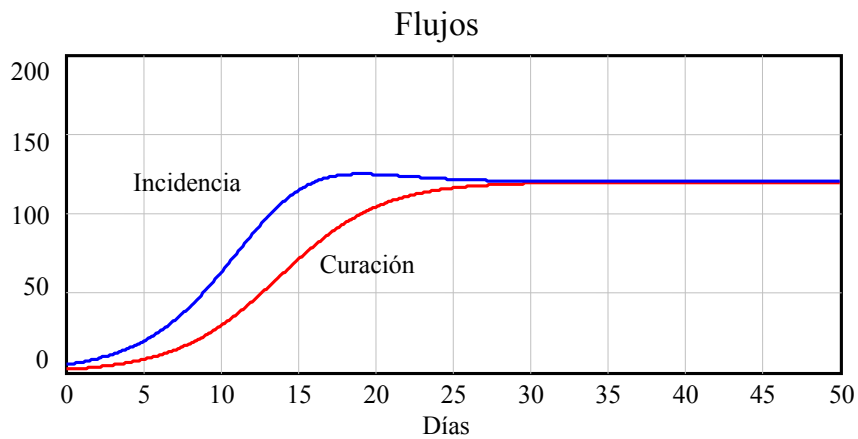


Figura 4.17b. Evolución de los flujos cuando la tasa de letalidad es nula

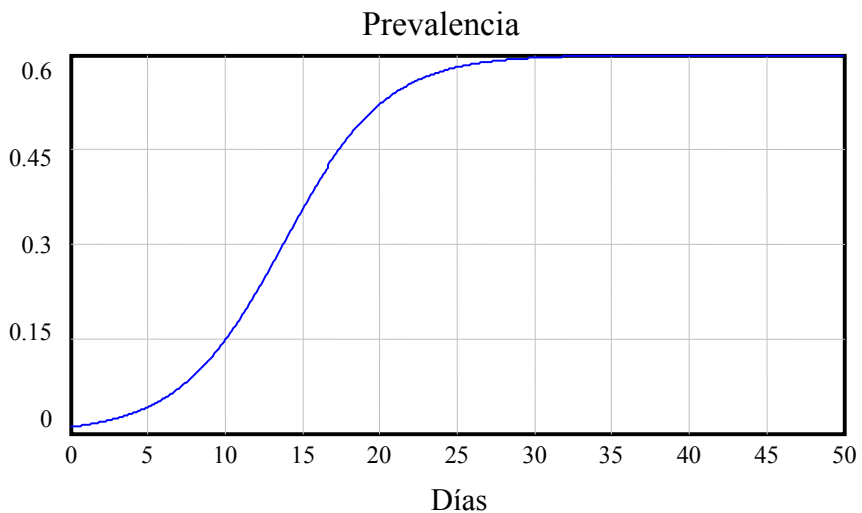


Figura 4.17c. Evolución de la Prevalencia cuando la tasa de letalidad es nula.

Si cambiamos las condiciones de la simulación suponiendo que la enfermedad sí causa muertes, con una Tasa de letalidad=0.1. Se puede comprobar, simulando 100 días, que las poblaciones evolucionan como se muestra en la figura 4.18a y que los flujos evolucionan como se muestra en la figura 4.18b.

Los resultados de las figuras 4.18a y 4.18b se pueden interpretar de la siguiente forma: en algo más de 100 días, la enfermedad acabará con la población. No quedará población enferma ni población susceptible de contraer la enfermedad, todos habrán fallecido como consecuencia de la enfermedad. Hasta llegar a esta situación la población enferma ha

experimentado un decrecimiento sigmoide, mientras que la población enferma y los flujos han tenido sus máximos valores entorno al día 25. Con una mayor tasa de letalidad la enfermedad encontrará más facilidad para acabar con la población enferma pero más oposición para acabar con la población total, por tanto podría incluso ocurrir que la enfermedad se erradicará de la población porque no quedarían enfermos para transmitirla.

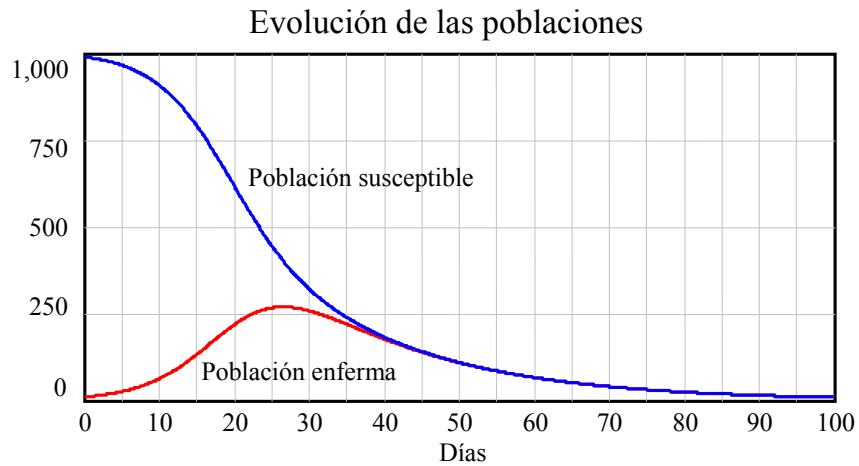


Figura 4.18a. Evolución de las poblaciones cuando hay tasa de letalidad.

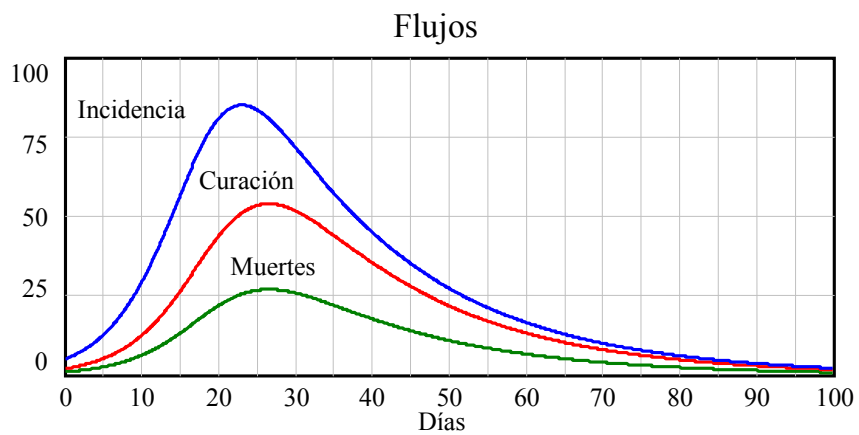


Figura 4.18b. Evolución de los flujos cuando hay tasa de letalidad.

5. MODELO GENÉRICO SOBRE “PROPAGACIÓN DE ENFERMEDADES”

Estudie atentamente este apartado porque el trabajo del módulo versará sobre su contenido.

El modelo “**Propagación de enfermedades**” documentado en el apartado anterior, aunque introducía dos ampliaciones sobre el modelo básico de Incidencia y Prevalencia, sigue siendo un modelo bastante simple para representar la propagación de determinadas enfermedades infecciosas. Su limitación está en que sólo considera dos grupos de población (la población susceptible y la población enferma). Por ejemplo no considera aspectos tales como:

- a) Las personas que enferman pasan un periodo de infección durante el cual pueden contagiar, pero luego mueren como consecuencia de la enfermedad o se vuelven inmunes.
- b) La inmunidad puede ser permanente o transitoria, en este segundo caso la población inmune vuelve a ser susceptible de contagio.
- c) La enfermedad se pone de manifiesto después de un periodo de latencia, durante el cual las personas afectadas aún no contagian la enfermedad.

La consideración en el modelo de los aspectos comentados en los puntos (a) y (b) obliga a renombrar a la “población enferma” como “población infectada” y a incorporar un tercer grupo de población (la población inmune), mientras que la consideración en el modelo del punto (c) obliga a incorporar un cuarto grupo de población (la población latente). Estos y otros aspectos se incorporan en el siguiente modelo genérico con 5 grupos de población, especialmente orientado a la propagación de enfermedades infecciosas.

El modelo consta de 5 variables de estado, 10 variables de flujo, 10 parámetros, 4 variables auxiliares, que se relacionan mediante 19 ecuaciones. Tal como se describe a continuación.

Estados de la población

Susceptibles

Cualquier persona o animal que supuestamente no posee suficiente resistencia contra un agente patógeno determinado que lo proteja contra la enfermedad, si llega a estar en contacto con el agente.

Latentes

Población de personas enfermas que todavía no muestran síntomas.

Infectados

La población de infectados (población enferma con síntomas) se caracteriza por la existencia de multiplicación o replicación del germen en los tejidos del huésped. La presencia de agentes infecciosos vivos en superficies del cuerpo, en prenda de vestir o en artículos sucios no constituye infección sino **contaminación** de dicha superficie u objetos.

Inmunes

Grupo de población en la cual el estado de resistencia suele provenir de la presencia de anticuerpos o células que poseen una acción específica contra el microorganismo causante de una enfermedad infecciosa o contra su toxina. La inmunidad eficaz depende de la **inmunidad celular**, que se adquiere por sensibilización de los linfocitos T, o de la **inmunidad humoral**, que se basa en la reacción de los linfocitos B, o de ambas. La **inmunidad pasiva** se obtiene naturalmente por la transmisión transplacentaria desde la madre, o artificialmente por inoculación de anticuerpos protectores específicos (provenientes de animales inmunizados o suero hiperinmune de convalecencia o seroglobulina inmune [humana]); es breve (de días a meses). La **inmunidad humoral activa**, que suele durar años, se adquiere por mecanismos naturales como consecuencia de una infección por manifestaciones clínicas o sin ellas, o en forma artificial por inoculación del propio agente, muerto, modificado o en forma variante o de fracciones o productos de tal agente. Se denomina **respuesta inmunitaria** al proceso reactivo del huésped tras la invasión del patógeno. Su objetivo es controlar el proceso de infección y matar a los parásitos con el fin de evitar la aparición de la enfermedad.

Portadores

Persona o animal infectado que alberga un agente infeccioso específico de una enfermedad, sin presentar signos o síntomas clínicos de ella, y que constituye una fuente potencial de infección. El estado de portador puede existir en un individuo en el curso de una infección no manifiesta (en estos casos suele denominársele **portador sano** o **portador asintomático**) o durante el período de incubación, la fase de convalecencia y de posconvalecencia en un individuo con infecciones que se manifiestan clínicamente (por lo regular llamado **portador en incubación** o **portador convaleciente**, respectivamente). En ambas circunstancias, el estado de portador puede ser breve o prolongado (**portadores temporales** o **transitorios**, o **crónicos**).

Flujos

Incidencia

Número de personas que pasan de la población de susceptibles a latentes o a infectados por unidad de tiempo.

Infección

Número de personas que pasan de la población de latentes a infectados por unidad de tiempo.

Recuperación

Número de personas que pasan de la población de infectados a la población de inmunes por unidad de tiempo.

Muertes

Número de personas que mueren como consecuencia de la enfermedad por unidad de tiempo.

Pérdida de inmunidad

Número de personas que pasan de la población de inmunes a la población de susceptibles por unidad de tiempo.

Preinfección

Número de personas que pasan de la población de inmunes a la población de infectados por unidad de tiempo.

De portador a infectado

Número de personas que pasan desde el estado de portador (sin síntomas) al estado de infectado (con síntomas) por unidad de tiempo.

De infectado a portador

Número de personas que pasan desde el estado de infectado (con síntomas) al estado de portador (sin síntomas) por unidad de tiempo.

De portador a inmune

Número de personas que pasan desde el estado de portador (sin síntomas) al estado de inmunidad (permanente o no) por unidad de tiempo.

Vacunación

Número de personas que pasan de la población inmunes a la población de susceptibles por unidad de tiempo.

Parámetros

Tasa de contagio

Proporción de personas que abandonan el estado de susceptibles y pasan al estado de latentes o infectados. También llamado coeficiente de transmisión de la enfermedad. Depende de dos factores: la tasa de contacto entre personas susceptibles e infecciosas y la probabilidad de transmisión de la enfermedad a partir de un contacto.

Periodo de latencia

El período de latencia es el tiempo que transcurre desde la entrada del germen (exposición) y el comienzo de eliminación (inicio de la capacidad de contagio). Es sinónimo de periodo de incubación.

Tasa de recuperación

Proporción de personas que abandonan el estado de infectados y pasan al estado de inmunes. El inverso de esta tasa es el período de infección, también llamado período de transmisibilidad: Lapso durante el cual el agente infeccioso puede ser transferido directa o indirectamente de una persona infectada a otra, de un animal infectado a humanos o de una persona infectada a animales, inclusive artrópodos.

Tasa de letalidad

Proporción de personas infectadas que fallecen.

Tasa de pérdida de inmunidad

Proporción de personas que dejan de ser inmunes y vuelven a ser susceptibles.

Tasa de reinfección

Proporción de personas que dejan de ser inmunes y vuelven a estar infectados.

Tasa de portador a infectado

Proporción de personas que dejan de ser portadores y vuelven a estar infectados.

Tasa de infectado a portador

Proporción de personas que dejan de estar infectados y pasan a ser portadores.

Tasa de portador a inmune

Proporción de personas que dejan de ser portadores y pasan a ser inmunes.

Tasa de vacunación

Proporción de personas que dejan de ser susceptibles y pasan a estar inmunes.

Variables auxiliares

Prevalencia

Proporción de la población total que está enferma o presenta cierto trastorno causado por la enfermedad.

Población total

Población total en un instante dado.

Tasa de incidencia

Cociente entre el número de casos nuevos (de la enfermedad específica), diagnosticados o notificados en la unidad de tiempo, y el número de personas que componen la población de la que surgieron esos casos.

Numero reproductivo básico (Ro)

Utilizado en el modelo como un indicador. Es el número esperado de nuevos casos que producirá una persona infectada durante su periodo de contagio en una población con personas susceptibles. No incluye a los casos producidos por casos secundarios. Tampoco a los casos secundarios que no son contagiosos.

Ecuaciones del modelo

$$\frac{d(\text{Susceptibles}(t))}{dt} = - \text{Incidencia}(t) - \text{Vacunacion}(t) + \text{Pérdida de inmunidad}(t) \quad (5.1)$$

$$\frac{d(\text{Latentes}(t))}{dt} = \text{Incidencia}(t) - \text{Infeccion}(t) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{Infectados}(t))}{dt} = & \text{Infeccion}(t) + \text{Reinfeccion}(t) + \text{De portador a infectado}(t) - \\ & - \text{De infectado a portador}(t) - \text{Recuperacion}(t) - \text{Muertes}(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{Inmunes}(t))}{dt} = & \text{Recuperacion}(t) + \text{De portador a inmune}(t) + \text{Vacunacion}(t) \\ & - \text{Reinfeccion}(t) - \text{Pérdida de inmunidad}(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{Portadores}(t))}{dt} = & \text{De infectado a portador}(t) - \\ & - \text{De portador a infectado}(t) - \text{De portador a inmune}(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Poblacion total}(t) = & \text{Susceptibles}(t) + \text{Latentes}(t) + \\ & + \text{Infectados}(t) + \text{Inmunes}(t) + \text{Portadores}(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\text{Prevalencia}(t) = \frac{\text{infectados}(t)}{\text{Poblacion total}(t)} \quad (5.7)$$

$$\text{Tasa de incidencia}(t) = \text{Tasa de contagio} \cdot \text{Prevalencia}(t) \quad (5.8)$$

$$\text{Incidencia}(t) = \text{Tasa de incidencia}(t) \cdot \text{Susceptibles}(t) \quad (5.9)$$

$$\text{Infeccion}(t) = \frac{\text{Latentes}(t)}{\text{Periodo de latencia}} \quad (5.10)$$

$$\text{Recuperacion}(t) = \text{Tasa de recuperacion} \text{ Infectados}(t) \quad (5.11)$$

$$\text{Muertes}(t) = \text{Tasa de letalidad} \text{ Infectados}(t) \quad (5.12)$$

$$\text{Reinfeccion}(t) = \text{Tasa de reinfeccion} \text{ Inmunes}(t) \quad (5.13)$$

$$\text{De portador a infectado}(t) = \text{Tasa de portador a infectado} \text{ Portadores}(t) \quad (5.14)$$

$$\text{De infectado a portador}(t) = \text{Tasa de infectado a portador} \text{ Infectados}(t) \quad (5.15)$$

$$\text{De portador a inmune}(t) = \text{Tasa de portador a inmune} \text{ Portadores}(t) \quad (5.16)$$

$$\text{Perdida de inmunidad}(t) = \text{Tasa de perdida de inmunidad} \text{ Inmunes}(t) \quad (5.17)$$

$$\text{Vacunacion}(t) = \text{Tasa de vacunacion} \text{ Susceptibles}(t) \quad (5.18)$$

$$\text{Numero reproductivo basico} = \frac{\text{Tasa de contagio}}{\text{Tasa de recuperacion}} \quad (5.19)$$

6. BIBLIOGRAFÍA

1. J. Aracil y F. Gordillo. “Dinámica de sistemas”. Alianza Editorial, 1997.
2. M. Glick and T. Duhon. “Generic structures: S-shaped growth I”. Massachusetts Institute of Technology, 1994.
3. J. Martín. “Teoría y ejercicios prácticos de Dinámica de Sistemas”. <http://www.upcnet/~jmg2/sistemas.htm> , 2003.
4. Halloran ME. Concept of Infectious Disease in Epidemiology (ch. 27). In: Rothman KJ, Greenland S. (eds). Modern Epidemiology. Philadelphia: Lippincott-Raven. 1998. (Se encuentra en el anexo de esta documentación).
5. Anderson R, Nokes DJ. Mathematical models of transmission and control (ch. 6.14). In: Detels R, McEwen J, Beaglehole R and Tanaka H.(eds). Oxford Textbook of Public Health. New York: Oxford University Press. Fourth edition Volume 2. 2002. (Se encuentra en el anexo de esta documentación).